

# Formes de Whitney et primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques

Jean-Paul Brasselet<sup>\*</sup> et Bernard Teissier<sup>†</sup>

7 février 2010

(version 50)

*Dédié à Heisuke Hironaka*

## Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Géométrie des morphismes triangulés</b>	<b>4</b>
1.1	Rappels . . . . .	4
1.2	Morphismes et faisceaux prismaux . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Faisceau prismaal associé à un morphisme simplicial</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Formes de Whitney</b>	<b>16</b>
3.1	Formes régulières, höldériennes et sous-analytiques . . . . .	16
3.2	Formes différentielles sur les complexes simpliciaux et les ensembles prismaux	18
3.3	Formes de Whitney sur les complexes simpliciaux . . . . .	18
3.4	Formes de Whitney sur les ensembles prismaux . . . . .	20
3.5	Formes de Whitney et formes relatives . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Formes différentielles sur les faisceaux prismaux</b>	<b>28</b>
4.1	Définitions . . . . .	28
4.2	Etude des formes de Whitney relatives dans $\mathcal{P}_f$ . . . . .	30
4.3	Triangulations et formes sous-analytiques . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Formes sous-analytiques et formes de Whitney relatives</b>	<b>34</b>
<b>6</b>	<b>Primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques</b>	<b>40</b>
6.1	Résolution de l'équation aux dérivées partielles . . . . .	43
6.2	Prolongement vertical . . . . .	45
6.3	Prolongement horizontal . . . . .	47
6.4	Le résultat . . . . .	47

---

<sup>\*</sup>CNRS, IML Luminy

<sup>†</sup>CNRS, IMJ Paris

AMS classification : 32B20, 32B25, 58C35

## Table des figures

1	Exemples de $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{P}_f$ . . . . .	10
2	$\mathcal{S}_f$ au dessus de $\tau$ et de $\tau'$ . . . . .	11
3	$\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{P}_f$ au dessus de $\tau$ . . . . .	12
4	$\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{P}_f$ au dessus de $\tau$ . . . . .	12
5	Spécialisations possibles d'un 5-simplexe au dessus d'un 2-simplexe $\tau$ . . .	13
6	Les ensembles $F_i$ et $G_i$ . . . . .	19
7	Les homothétiques $\sigma_{(x,\varepsilon)}$ et $\pi(\sigma)_{(x,\varepsilon)}$ . . . . .	35
8	Faces $\gamma$ de $\phi$ dans $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{P}_f$ . . . . .	42

## 0 Introduction

L'origine de ce travail est une question posée par François Treves au second auteur en 1982 :

*Etant donné un morphisme analytique  $g: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}$  où  $\mathbf{S}^n$  est la sphère de dimension  $n$ , et une  $r$ -forme différentielle  $\omega$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{S}^n$  dont la restriction à chaque fibre non singulière de  $g$  est exacte, existe-t-il une  $(r-1)$ -forme  $H$  höldérienne sur  $\mathbf{S}^n$  telle que l'on ait*

$$dg \wedge (\omega - dH) = 0,$$

*la différentielle  $dH$  étant prise au sens des distributions ?*

Dans ce travail nous démontrons un analogue de ce résultat pour une forme  $\omega$  sous-analytique et continue, dans le cadre plus général des morphismes sous analytiques propres triangulables entre espaces non singuliers (voir le Corollaire 6.3 ci-dessous). Rappelons que Masahiro Shiota a démontré que tout morphisme sous-analytique d'un espace compact vers  $\mathbf{R}$  est triangulable (voir [Sh1], [Sh2], Chap. II, §3) et que le second auteur a prouvé (voir [Te1]) que tout morphisme sous-analytique propre devient triangulable localement sur la base après des changements de base qui sont des composés finis d'éclatements locaux du but.

S. Chanillo et F. Treves ont prouvé en 1997 (voir [C-T], Lemme 2.2) un résultat analogue à l'énoncé ci-dessus : sous l'hypothèse d'annulation à l'ordre infini de  $\omega$  le long des fibres singulières de  $g$ , ils obtiennent une primitive relative de classe  $\mathcal{C}^\infty$  satisfaisant la même propriété d'annulation.

Rappelons aussi qu'une fonction  $h$  sur une variété analytique  $U$  est dite höldérienne si tout point de  $U$  possède un voisinage  $V$  tel qu'il existe des constantes positives  $\alpha$  et  $C$  telles que pour  $x, x' \in V$  on ait  $|h(x) - h(x')| \leq C|x - x'|^\alpha$ . Une forme différentielle sur  $U$  est dite höldérienne si ses coefficients sont des fonctions höldériennes sur  $U$  et si sa différentielle au sens des distributions peut être représentée par une forme à coefficients höldériens. Rappelons enfin que pour une fonction, être sous-analytique et continue implique la propriété de Hölder grâce aux inégalités de Łojasiewicz étendues au cas sous-analytique par Hironaka (cf [Hi], [Ha] et §1).

L'idée principale est de transformer ce problème d'analyse en un problème géométrique en représentant les formes différentielles au moyen des *formes de Whitney*. Rappelons que la forme différentielle que Whitney associe (cf [Whi, Chap. IV, §27]) à un simplexe d'une variété différentielle triangulée est essentiellement une régularisation de la forme volume de ce simplexe exprimée en coordonnées barycentriques ; c'est cette dernière que nous appellerons forme de Whitney. L'hypothèse de triangulabilité du morphisme permet de transporter le problème sur un morphisme simplicial  $f: \Delta \rightarrow T$  au moyen d'homéomorphismes sous-analytiques.

Le cadre sous-analytique convient bien pour cette raison et parce que les formes volumes des simplexes en coordonnées barycentriques sont linéaires par morceaux (dans l'étoile de chaque simplexe) et continues et donc sous-analytiques et continues. Elles sont d'ailleurs non seulement höldériennes mais même lipschitziennes comme formes différentielles définies sur l'espace entier. Il n'y a donc pas à les régulariser, et l'on a une correspondance biunivoque entre simplexes et formes de Whitney, ce qui joue un rôle important dans la suite.

La première difficulté est que la décomposition simpliciale de  $\Delta$  n'induit pas sur les fibres de  $f$  une décomposition simpliciale. Mais nous avons remarqué qu'elle induisait

une décomposition en prismes (produits de simplexes), et que ces décompositions étaient naturellement isomorphes pour toutes les fibres de points de l'intérieur d'un simplexe de la base  $T$ . L'utilité de cette géométrie prismale a été remarquée indépendamment et pour des raisons analogues (intégration dans les fibres), par J. Dupont et ses collaborateurs (voir [Du-L], en particulier §3, et [Du-K]). Pour rendre compte des dégénérescences de la structure prismale des fibres qui se produisent par spécialisation sur les faces d'un simplexe de  $T$  nous avons introduit les *faisceaux prismaux*. Le morphisme simplicial définit canoniquement un faisceau prismal mais en fait il est bien plus commode de travailler avec un autre faisceau prismal, qui est un "éclaté" de celui-ci et est trivialisé au dessus de chaque simplexe fermé de  $T$ . Sur ce faisceau trivialisé il est facile de définir les formes de Whitney ; la forme de Whitney d'un prisme est essentiellement le produit extérieur des formes de Whitney des simplexes facteurs du prisme. Le calcul permet de définir naturellement les formes de Whitney *relatives*. Après avoir représenté (modulo les formes exactes) la forme  $\omega$  par une combinaison linéaire de formes de Whitney relatives, on cherche  $H$  sous la même forme, et le problème de la recherche d'une primitive relative se ramène finalement à la résolution dans chaque simplexe d'équations aux dérivées partielles d'une forme très particulière qui permet de démontrer assez facilement l'existence de solutions sous-analytiques.

La première partie du texte (§1 et §2) précise le point de vue que nous utilisons sur la combinatoire des morphismes simpliciaux. La seconde partie (§3) détaille le comportement des formes de Whitney vis à vis de cette combinatoire. On y trouve en particulier une remarque (3.11) que nous pensons intéressante sur la version "formes de Whitney" de l'homomorphisme bord des chaînes simpliciales. Nous avons détaillé les calculs dans l'espoir de faciliter l'application de cette géométrie prismale à d'autres problèmes. Dans la troisième partie (§4 et §5) nous exprimons explicitement une forme sous-analytique comme combinaison à coefficients sous-analytiques de formes de Whitney. Dans la dernière partie, les résultats des parties précédentes permettent de poser de manière précise les équations à résoudre pour trouver une primitive relative ; cette partie contient les résultats d'intégration locale et de globalisation qui achèvent la preuve du théorème 6.1 et de son corollaire 6.3, qui est notre résultat principal.

*Nous remercions les collègues qui nous ont encouragés pendant la préparation de ce texte, et principalement Lê D.T. et Claude Weber, ainsi que le Département de Mathématiques de l'Université de Genève et la School of Mathematics de l'ICTP de Trieste qui nous ont offert la possibilité de venir y travailler à ce projet.*

# 1 Géométrie des morphismes triangulés

## 1.1 Rappels

**Définition 1.1.** Soit  $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  un sous-ensemble sous-analytique tel que la restriction  $g: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  de la première projection soit un morphisme propre. On rappelle qu'une triangulation de cette situation est la donnée :

1. d'homéomorphismes sous-analytiques  $t$  de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  dans lui-même et  $t_0$  de  $\mathbf{R}^n$  dans

lui-même, tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m & \xrightarrow{t} & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m & \supset & X \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 & & \downarrow g \\ \mathbf{R}^n & \xrightarrow{t_0} & \mathbf{R}^n & = & \mathbf{R}^n \end{array}$$

2. de décompositions de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  et de  $\mathbf{R}^n$  en simplexes linéaires de telle façon que les homéomorphismes  $t$  et  $t_0$  soient analytiques à l'intérieur de chaque simplexe et que  $pr_1$  soit une application simpliciale. Ces données doivent être compatibles avec  $X$  : si l'image par  $t$  d'un simplexe rencontre  $X$ , elle est contenue dans  $X$ .

Dans la suite, étant donné un morphisme  $g$  triangulé comme ci-dessus, nous noterons  $\Delta$  le sous-complexe simplicial de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  formé des simplexes dont l'image par  $t$  rencontre  $X$ . Le sous-complexe simplicial de  $\mathbf{R}^n$  formé des simplexes dont l'image par  $t_0$  rencontre  $g(X)$  sera noté  $T$ , enfin  $f: \Delta \rightarrow T$  désignera le morphisme induit par  $pr_1$ .

**Remarques 1.2.** 1) D'après l'inégalité de Łojasiewicz, tout homéomorphisme sous-analytique  $t$  est höldérien sur tout compact : pour tout sous-ensemble compact  $K$  de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ , il existe des nombres réels positifs  $C$  et  $\alpha$  tels que l'on ait :  $\|t(y) - t(x)\| \leq C\|y - x\|^\alpha$ .  
2) L'image par  $pr_1$  d'un simplexe est un simplexe et l'image réciproque par  $pr_1$  d'un simplexe est une réunion de simplexes.

## 1.2 Morphismes et faisceaux prismaux

**Définition 1.3.** Un *prisme* (resp. un prisme ouvert, resp. un prisme fermé) est un produit de simplexes (resp. simplexes ouverts, resp. fermés) linéairement plongés dans un espace euclidien et muni de la topologie induite ; l'ensemble vide est donc un prisme auquel, par convention, on attribue la dimension  $-\infty$ . Une *face* d'un prisme est vide ou est un produit de faces de ses facteurs. Nous appellerons *coordonnées barycentriques* d'un point d'un prisme la famille des coordonnées barycentriques de ses projections sur les facteurs du prisme.

Un *ensemble prismaal* de  $\mathbf{R}^N$  est une réunion localement finie de prismes fermés telle que l'intersection de deux quelconques d'entre eux soit une face de chacun. Un sous-complexe simplicial d'une triangulation de  $\mathbf{R}^N$  est un ensemble prismaal.

Sauf mention du contraire, les simplexes et les prismes considérés dans la suite sont fermés.

Un *ensemble prismaal de dimension pure  $d$*  est une réunion de prismes de dimension  $d$ .

Une *orientation* d'un prisme  $\pi = \sigma_0 \times \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p$  est la donnée d'un ordre sur l'ensemble  $\{0, \dots, p\}$  et d'une orientation sur chaque simplexe  $\sigma_i$ . Une orientation d'un prisme détermine une orientation de chacune de ses faces. Une *orientation locale* d'un ensemble prismaal est la donnée d'une orientation de chacun de ses prismes.

Si un ensemble prismaal de dimension pure  $d$  est une pseudovariété (resp. une pseudovariété à bord, voir [Spa, Chap. 3, 11]), tout prisme de dimension  $d - 1$  est face de deux prismes (resp. un ou deux prismes) de dimension  $d$ . Le bord, quand il existe, est le sous-ensemble prismaal constitué des prismes de dimension  $d - 1$  qui sont faces d'exactly un prisme de dimension  $d$ . Un ensemble prismaal  $\Pi$  qui est une pseudovariété de dimension

$d$  est *orienté* s'il est muni d'une orientation locale telle que les orientations induites sur tout prisme de dimension  $d - 1$  par deux prismes dont il est face soient opposées.

Rappelons qu'un morphisme simplicial d'un complexe simplicial dans un autre est une application dont la restriction à chaque simplexe de la source a pour image un simplexe du but et qui est linéaire en les coordonnées barycentriques.

**Définition 1.4.** Une application  $\varphi$  d'un ensemble prismal  $\Pi$  dans un ensemble prismal  $\Sigma$  est un morphisme prismal si pour tout prisme  $\pi = \sigma_0 \times \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p$  de  $\Pi$ , l'image  $\varphi(\pi)$  est un prisme  $\tau_0 \times \tau_1 \times \cdots \times \tau_s$  et l'application induite  $\varphi$  sur  $\pi$  est linéaire dans les coordonnées barycentriques des prismes.

Un morphisme simplicial entre complexes simpliciaux est un morphisme prismal.

Un morphisme prismal entre des ensembles prismaux orientés est dit *orienté* s'il respecte les orientations des prismes.

## 2 Faisceau prismal associé à un morphisme simplicial

L'exemple suivant est fondamental pour ce qui suit :

Soit  $f: \sigma \rightarrow \tau$  un morphisme simplicial entre deux simplexes ; pour chaque sommet  $y_j$  de  $\tau$ , ( $0 \leq j \leq s = \dim \tau$ ), posons  $\sigma_j = f^{-1}(y_j)$  et  $\pi_f(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ . On se propose de définir des morphismes prismaux

$$\psi_f^\sigma : \pi_f(\sigma) \rightarrow \sigma \quad \text{et} \quad \theta_f^\sigma : f^{-1}(\overset{\circ}{\tau}) \rightarrow \pi_f(\sigma)$$

dont les restrictions au dessus de  $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau})$  et  $\overset{\circ}{\tau} \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le morphisme  $f$ , nous omettrons l'écriture des indices  $f$  dans ce qui suit. Ainsi nous noterons

$$\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s. \quad (2.1)$$

Chaque sommet  $a_i$  de  $\sigma$  est dans l'un des simplexes  $\sigma_j$  et un seul. Pour chaque  $j$ , notons  $I(j)$  l'ensemble des indices  $i$  des sommets  $a_i$  de  $\sigma_j$ . Etant donné un point  $x$  de  $\sigma$ , de coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  relativement aux sommets  $a_i$ , les coordonnées de  $f(x)$  relativement aux sommets  $y_j$  de  $\tau$  sont

$$t_j = \sum_{i \in I(j)} \lambda_i. \quad (2.2)$$

Si l'image  $f(x)$  est dans l'intérieur de  $\tau$ , les sommes  $\sum_{i \in I(j)} \lambda_i$  sont donc non nulles ; pour chaque  $j$ , notons  $x_j$  le point de  $\sigma_j$  de coordonnées barycentriques

$$\mu_{j,k} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i \in I(j)} \lambda_i}, \quad k \in I(j) \quad (2.3)$$

relativement aux sommets  $a_k$  de  $\sigma$  situés dans  $\sigma_j$ . Notons  $\theta^{\sigma_j}$  l'application  $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau}) \rightarrow \sigma_j$  qui à  $x$  associe le point  $x_j$ , et  $\theta^\sigma$  l'application de  $f^{-1}(\overset{\circ}{\tau})$  dans le prisme  $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  définie par

$$\theta^\sigma : x \mapsto (f(x), x_0, \cdots, x_s). \quad (2.4)$$

La projection  $f$  induit un isomorphisme simplicial du simplexe enveloppe convexe des points  $x_j$  dans  $\sigma$  sur  $\tau$ . Le point  $x$  est le point de ce simplexe dont les coordonnées barycentriques sont celles du point  $f(x)$  dans  $\tau$ . Ceci nous donne une description de  $\sigma$  comme *joint itéré* des simplexes  $\sigma_j$ .

On peut en effet définir le joint itéré  $\sigma_0 * \dots * \sigma_s$  de  $s + 1$  simplexes  $\sigma_j$  linéairement indépendants dans un espace euclidien comme la réunion des simplexes de dimension  $s + 1$  qui sont les enveloppes convexes d'ensembles de points de la forme  $(x_j \in \sigma_j); j = 0, \dots, s$ . Le simplexe obtenu est simplicialement isomorphe au résultat de la construction classique du joint itéré comme quotient de  $\sigma_0 \times \dots \times \sigma_s \times [0, 1]^s$ . Rappelons cette construction pour  $s = 1$  :

$$\sigma_0 * \sigma_1 = (\sigma_0 \times \sigma_1 \times [0, 1]) / \langle (a, b, 0) \sim (a', b, 0), (a, b, 1) \sim (a, b', 1) \rangle.$$

Par construction, l'ensemble des sommets du joint coïncide avec l'ensemble des sommets des  $\sigma_j$ . Une orientation du joint peut donc s'interpréter comme la donnée d'un ordre sur l'ensemble d'indices  $j$  et d'une orientation de chacun des simplexes  $\sigma_j$ .

Si  $f$  est un morphisme simplicial orienté et si on munit chaque  $\sigma_j$  de l'orientation induite par celle de  $\sigma$ , alors l'orientation naturelle du joint itéré déduite de celles de  $\tau$  et des  $\sigma_j$  n'est autre que celle de  $\sigma$ .

On définit le morphisme  $\psi^\sigma: \pi(\sigma) \rightarrow \sigma = \sigma_0 * \dots * \sigma_s$  qui, au point de coordonnées

$$(t_j)_{j=0, \dots, s}, (\mu_{0, i_0})_{i_0 \in I(0)}, \dots, (\mu_{s, i_s})_{i_s \in I(s)}$$

de  $\pi(\sigma)$ , associe le point de  $\sigma$  dont la coordonnée barycentrique relative au sommet  $a_i$  est  $\lambda_i = t_j \mu_{j, i}$ , où  $j$  est l'indice tel que  $i \in I(j)$ . Ce morphisme est un morphisme prismal.

Remarquons que, si  $\sigma$  et  $\tau$  sont orientés ainsi que le morphisme  $f$ , cela détermine une unique orientation du joint itéré  $\sigma_0 * \dots * \sigma_s$  et une unique orientation du prisme  $\pi(\sigma)$  telles que les morphismes  $\pi(\sigma) \rightarrow \sigma$  et  $\pi(\sigma) \rightarrow \tau$  soient orientés.

**Proposition 2.1.** *Les restrictions au dessus de  $f^{-1}(\hat{\tau})$  et  $\hat{\tau} \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  des morphismes prismaux  $\psi^\sigma: \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$  et  $\theta^\sigma: f^{-1}(\hat{\tau}) \rightarrow \pi(\sigma)$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

PREUVE. En effet tout point  $x$  de  $\sigma$  s'écrit

$$x = \sum_{j=0}^s t_j x_j = \sum_{j=0}^s t_j \left( \sum_{i \in I(j)} \mu_{j, i} a_i \right) = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i.$$

□

**Définition 2.2.** Soit  $P$  un ensemble prismal. Un *faisceau prismal*  $\mathcal{F}$  sur  $P$  est la donnée pour chaque prisme fermé  $\rho$  de  $P$  d'un ensemble prismal  $\mathcal{F}(\rho)$  doté d'un morphisme prismal  $e_\rho: \mathcal{F}(\rho) \rightarrow \rho$  et pour chaque face  $\rho'$  de  $\rho$  d'un morphisme prismal  $h_{\rho', \rho}: \mathcal{F}(\rho) \rightarrow \mathcal{F}(\rho')$  de telle façon que  $h_{\rho, \rho} = Id_{\mathcal{F}(\rho)}$  et que si  $\rho''$  est une face de  $\rho'$ , alors  $h_{\rho'', \rho} = h_{\rho'', \rho'} \circ h_{\rho', \rho}$ . On dit que le faisceau prismal  $\mathcal{F}$  est propre si les ensembles prismaux  $\mathcal{F}(\rho)$  sont compacts.

**Remarque 2.3.** En fait, la notion de faisceau prismal s'apparente davantage à la notion de carapace (ce qui fut la première définition des faisceaux, voir Séminaire Cartan [Car])

qu'à la notion de faisceau. Plus précisément, munissons l'ensemble des prismes d'un ensemble prismal de l'ordre partiel donné par les inclusions des faces, puis de la topologie dont une base de fermés est constituée des intervalles fermés  $\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2$ . Les sections du faisceau prismal au dessus d'un fermé  $F$  sont les éléments du produit  $\prod_{\rho \in F} \mathcal{F}(\rho)$  compatibles avec les homomorphismes de restriction.

Soient  $\varphi: P \rightarrow \Sigma$  un morphisme prismal,  $\mathcal{F}$  un faisceau prismal sur  $P$  et  $\mathcal{G}$  un faisceau prismal sur  $\Sigma$ . Un *morphisme de faisceaux prismaux* de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{G}$  est la donnée pour chaque prisme fermé  $\rho$  de  $P$  d'un morphisme prismal  $\mathcal{F}(\rho) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi(\rho))$  compatibles avec les homomorphismes de restriction.

**Lemme 2.4.** *Etant donné un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  sur  $P$  et  $\rho$  un prisme de  $P$ , au dessus de l'intérieur  $\mathring{\rho}$  de  $\rho$  l'ensemble  $\mathcal{F}(\rho)$  est une réunion de produits de simplexes.*

PREUVE. Supposons dans un premier temps que  $\rho$  soit un simplexe  $\tau$ . Tout prisme de l'ensemble  $\mathcal{F}(\tau)$  est le produit d'un simplexe d'image  $\tau$  par un nombre, éventuellement nul, de simplexes. En effet, dans le cas contraire, il existe un prisme  $\sigma_0 \times \sigma_1$  de  $\mathcal{F}(\tau)$  d'image  $\tau$  mais tel que ni  $\sigma_0$ , ni  $\sigma_1$  n'ait pour image  $\tau$ . Cela implique qu'il existe deux sommets  $a_0$  et  $a_1$  de  $\sigma_0$ , dont on note  $\lambda_{a_0}$  et  $\lambda_{a_1}$  les coordonnées barycentriques correspondantes et deux sommets  $b_0$  et  $b_1$  de  $\sigma_1$ , dont on note  $\lambda_{b_0}$  et  $\lambda_{b_1}$  les coordonnées barycentriques correspondantes, tels que les trois sommets  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_0, b_1)$  et  $(a_1, b_1)$  du produit  $\sigma_0 \times \sigma_1$  aient pour images des sommets distincts de  $\tau$ . Alors, les coordonnées barycentriques d'un point de l'image de  $\sigma_0 \times \sigma_1$  sont fonction du produit  $\lambda_{a_0} \lambda_{b_1}$ , ce qui contredit l'hypothèse de linéarité.

Si  $\sigma$  est un simplexe de  $\mathcal{F}(\tau)$  d'image  $\tau$ , alors  $\sigma$  est le joint des simplexes  $\sigma_i = e_{\mathcal{F}}^{-1}(y_i) \cap \sigma$  du bord de  $\sigma$  situés au dessus des sommets  $y_i$  de  $\tau$ . La fibre de  $e_{\mathcal{F}}$  au dessus d'un point de l'intérieur de  $\tau$  est donc homéomorphe au produit des simplexes  $\sigma_i$ , d'où le résultat dans ce cas. On en déduit le résultat pour tout prisme de  $\mathcal{F}(\tau)$ .

Dans le cas d'un prisme  $\rho$ , produit de simplexes, le résultat provient de ce qu'il est vérifié au dessus de chacune des composantes du produit. Une autre manière de le montrer est de subdiviser tout prisme  $\rho$  de la base  $P$  en simplexes, ceci par récurrence en se fixant un barycentre dans chaque simplexe composante du prisme  $\rho$ , puis à décomposer le morphisme  $\mathcal{F}(\rho) \rightarrow \rho$  au dessus de ces simplexes.  $\square$

**Lemme 2.5.** *Pour toute orientation de  $\rho$ , il est équivalent de se donner une orientation de la fibre  $\mathcal{F}(b(\rho))$  au dessus du barycentre  $b(\rho)$  de  $\rho$ , une orientation compatible pour toutes les fibres  $\mathcal{F}(y)_{y \in \mathring{\rho}}$ , ou une orientation de l'ensemble prismal  $\mathcal{F}(\rho)$ .*

PREUVE. Cela provient de ce que la donnée d'une orientation d'un espace fibré (orientable) équivaut à la donnée d'une orientation de la base suivie d'une orientation de la fibre.  $\square$

Le bord (orienté) d'un produit orienté  $\sigma_0 \times \sigma_1$  est

$$\partial(\sigma_0 \times \sigma_1) = \partial\sigma_0 \times \sigma_1 + (-1)^{|\sigma_0|} \sigma_0 \times \partial\sigma_1,$$

d'où, par récurrence, le bord orienté d'un prisme  $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  est :

$$\partial(\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s) = \sum_{j=0}^s (-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} \sigma_0 \times \cdots \times \partial\sigma_j \times \cdots \times \sigma_s. \quad (2.5)$$



**Définitions 2.6.** a) Etant donné un simplexe orienté  $\sigma$  et une face  $\sigma'$  de codimension 1, alors  $\sigma'$  hérite de deux orientations. La première est celle induite par l'orientation de  $\sigma$ , c'est-à-dire la restriction de l'ordre correspondant des sommets de  $\sigma$ , la seconde est celle qu'il a en tant que face de  $\sigma$ . Ces deux orientations diffèrent d'un signe appelé nombre d'incidence et noté  $[\sigma; \sigma']$ .

b) Etant donné un ensemble prismal orienté  $P$  qui est une variété topologique, pour tout couple  $(\rho, \rho')$  de prismes orientés tel que  $\rho'$  soit une face de codimension 1 de  $\rho$ , le nombre d'incidence  $[\rho; \rho']$  est égal à  $+1$  si l'orientation de  $\rho'$  coïncide avec l'orientation du bord de  $\rho$ , et à  $-1$  sinon.

**Lemme 2.7.** a) Soit  $\sigma$  un simplexe orienté, notons  $\sigma'_i$  ses faces de codimension 1, alors

$$\partial\sigma = \sum_i [\sigma; \sigma'_i] \sigma'_i,$$

b) Soit  $\pi = \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_j \times \cdots \times \sigma_s$  un prisme orienté, et  $\pi' = \sigma_0 \times \cdots \times \sigma'_j \times \cdots \times \sigma_s$  une face de codimension 1. Le nombre d'incidence  $[\pi; \pi']$  est égal à  $(-1)^{|\sigma_0| + \cdots + |\sigma_{j-1}|} [\sigma_j; \sigma'_j]$ .

PREUVE. Le a) découle de la définition du bord d'un simplexe. On en déduit le b) en considérant les permutations.  $\square$

**Définition 2.8.** Un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  sur un ensemble prismal orienté  $P$  qui est une variété topologique est orienté si pour chaque prisme  $\rho$  de dimension maxima de  $P$ , on a une orientation de la fibre  $\mathcal{F}(b(\rho))$  au dessus du barycentre de  $\rho$ , de telle façon que si l'on munit  $\mathcal{F}(\rho)$  de l'orientation correspondante (cf Lemme 2.5), les morphismes  $h_{\rho', \rho}$  sont  $[\rho; \rho']$ -orientés.

Les exemples de faisceaux prismaux qui suivent sont fondamentaux pour ce travail.

**Exemple 2.9.** Soit  $f: S \rightarrow T$  un morphisme simplicial surjectif d'ensembles simpliciaux, on définit un faisceau prismal  $\mathcal{S}_f$  sur  $T$  en posant, pour tout simplexe  $\tau$  de  $T$ ,  $\mathcal{S}_f(\tau) = f^{-1}(\tau)$ . On continue de noter par  $f$  la projection de  $\mathcal{S}_f$  sur  $T$ . Si  $\tau'$  est une face de  $\tau$  et  $\sigma$  un simplexe de  $f^{-1}(\tau)$ , le simplexe  $\sigma' = \sigma \cap f^{-1}(\tau')$  est une face de  $\sigma$ . On peut écrire  $\sigma$  comme le joint de  $\sigma'$  et de sa face opposée  $\sigma''$ . On définit alors  $h_{\tau', \tau}: \mathcal{S}_f(\tau) \rightarrow \mathcal{S}_f(\tau')$  en prenant pour  $h_{\tau', \tau}: \sigma \rightarrow \sigma'$  la projection simpliciale de  $\sigma$  sur  $\sigma'$  selon les fibres du joint.

**Exemple 2.10.** Soit  $\Delta$  un complexe simplicial fini d'une subdivision simpliciale linéaire de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  tel que la restriction  $f$  à  $\Delta$  de la première projection  $p$  soit une application simpliciale sur un complexe simplicial  $f(\Delta)$  d'une subdivision simpliciale linéaire de  $\mathbf{R}^n$ .

Supposons que  $\sigma^{12}$  soit une face commune des simplexes  $\sigma^1$  et  $\sigma^2$  de  $\Delta$  et que ces trois simplexes aient la même image  $\tau$ , simplexe de sommets  $y_0, \dots, y_s$ . Alors le prisme  $\pi(\sigma^{12}) = \pi_f(\sigma^{12})$  est un sous-prisme de  $\pi(\sigma^1)$  et de  $\pi(\sigma^2)$ . En fait, avec la notation de l'exemple 2.1, on voit que l'intersection de  $\pi(\sigma^1)$  et  $\pi(\sigma^2)$  est le prisme  $\tau \times \prod (\sigma_j^1 \cap \sigma_j^2)$ , où  $j = 0, \dots, s$ .

Remarquons que la composition  $\theta^\sigma \circ \psi^\sigma$  (Proposition 2.1) donne un plongement naturel de  $\pi(\sigma)$  dans  $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$ . On en déduit un plongement de  $\pi(\sigma^1)$  et de  $\pi(\sigma^2)$  dans  $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$ , on vérifie aussitôt que ces deux plongements coïncident sur  $\sigma^{12}$  et que l'on a donc défini un plongement de  $\pi(\sigma^1) \cup \pi(\sigma^2)$  dans  $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$ . Cela montre que, si  $\tau \in f(\Delta)$  est fixé, la réunion des prismes  $\pi(\sigma)$  tels que  $f(\sigma) = \tau$ , plongée de la façon naturelle que l'on vient de décrire dans  $\mathbf{R}^n \times \Pi_0^s \mathbf{R}^m$ , est un sous-ensemble prismal  $\mathcal{F}(\tau)$  muni d'un morphisme prismal surjectif  $e_\tau: \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \tau$ . L'ensemble prismal  $e_\tau^{-1}(\hat{\tau})$  est naturellement isomorphe à

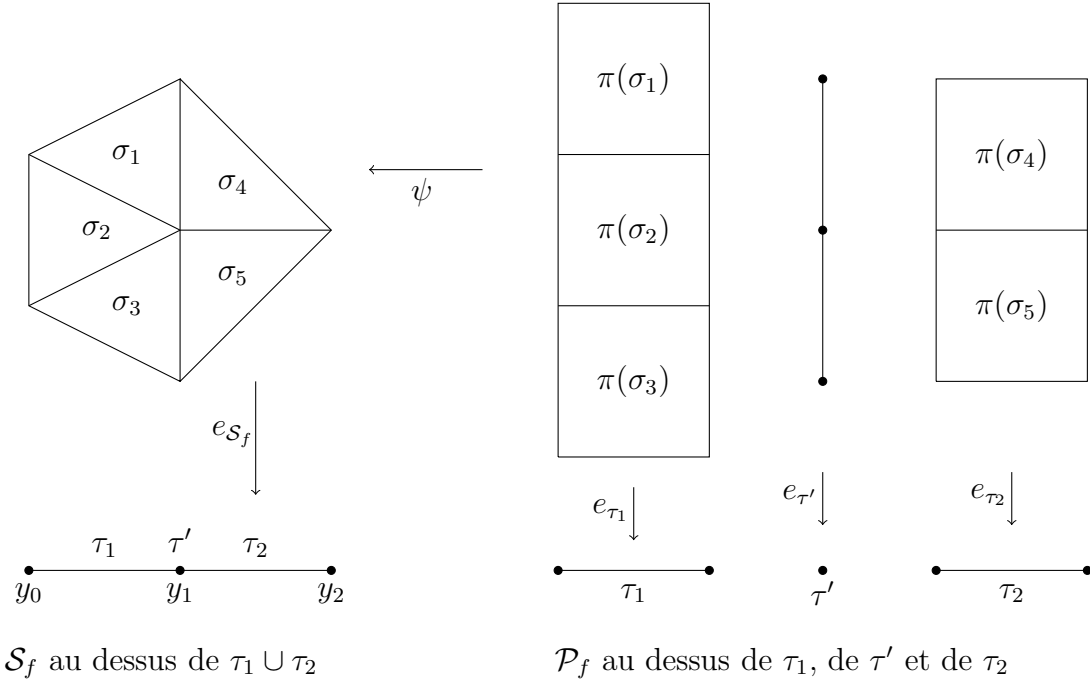


FIGURE 1 – Exemples de  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{P}_f$

$\mathring{\tau} \times \cup_k (\Pi_{j=0}^s(\sigma_j^k))$  où les  $\sigma^k$  sont les simplexes de  $e_\tau^{-1}(\mathring{\tau})$  d'image  $\tau$  et  $\sigma_j^k = \sigma^k \cap f^{-1}(y_j)$ . On peut donc appeler fibre type  $F_\tau$  de  $e_\tau$  la réunion des  $\Pi_{j=0}^s(\sigma_j^k)$ .

Ce morphisme prismal a la propriété que l'image inverse d'un simplexe fermé de  $f(\Delta)$  est le produit de ce simplexe par un ensemble prismal ; nous pourrions donc y définir des formes de Whitney relatives.

Supposons que  $\tau'$  soit une face de  $\tau$  et posons  $\sigma' = \sigma \cap f^{-1}(\tau')$ . D'après ce qui précède, chaque prisme de  $\mathcal{F}(\tau)$  est de la forme  $\tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  où  $\sigma_j = f^{-1}(y_j) \cap \sigma$ . L'homomorphisme  $h_{\tau', \tau}$  de  $\mathcal{F}(\tau)$  dans  $\mathcal{F}(\tau')$  est l'homomorphisme de dégénérescence qui associe au prisme  $\tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  le prisme  $\tau' \times \sigma'_0 \times \cdots \times \sigma'_s$  où  $\sigma'_j = f^{-1}(y_j) \cap \sigma'$  si  $y_j$  est un sommet de  $\tau'$  et un point sinon.

Notons  $e_{\mathcal{P}_f} : \mathcal{P}_f \rightarrow f(\Delta)$  le faisceau prismal ainsi obtenu.

Le théorème qui suit montre l'existence d'un morphisme canonique  $\psi : \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$ .

**Théorème 2.11.** *Soit  $f : \Delta \rightarrow T$  un morphisme simplicial. Considérons le faisceau prismal  $\mathcal{S}_f$  de l'exemple 2.9 et le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  de l'exemple 2.10. Il existe un morphisme surjectif  $\psi : \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$  de faisceaux prismaux sur  $f(\Delta)$  tel que*

a) *Pour chaque simplexe  $\tau$  de  $f(\Delta)$  les morphismes  $\theta^\sigma$  et  $\psi^\sigma$  de la Proposition 2.1 définissent un isomorphisme  $\theta_\tau$  de  $f^{-1}(\mathring{\tau})$  sur  $\mathring{\tau} \times F_\tau$ . Le composé  $\theta_\tau \circ \psi$  s'étend en un isomorphisme prismal de  $\mathcal{P}_f(\tau)$  sur  $\tau \times F_\tau$ .*

b) *La formation du faisceau  $\mathcal{P}_f$  est fonctorielle et universelle. Plus précisément :*

1. *pour tout morphisme prismal  $\phi^f : P' \rightarrow \Delta$ , il existe un faisceau prismal  $\mathcal{F}(P')$  sur  $f(\Delta)$  et un morphisme de faisceaux prismaux  $\mathcal{F}(\phi^f) : \mathcal{F}(P') \rightarrow \mathcal{P}_f$ ,*
2. *étant donné un morphisme surjectif  $\psi' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{S}_f$  de faisceaux prismaux sur  $f(\Delta)$  tel que l'image inverse de tout simplexe  $\tau$  de  $f(\Delta)$  par  $f \circ \psi'$  soit réunion de produits de  $\tau$  par des prismes, il existe un unique morphisme  $\chi : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{P}_f$  rendant commutatif le diagramme de faisceaux prismaux au dessus de  $f(\Delta)$  :*

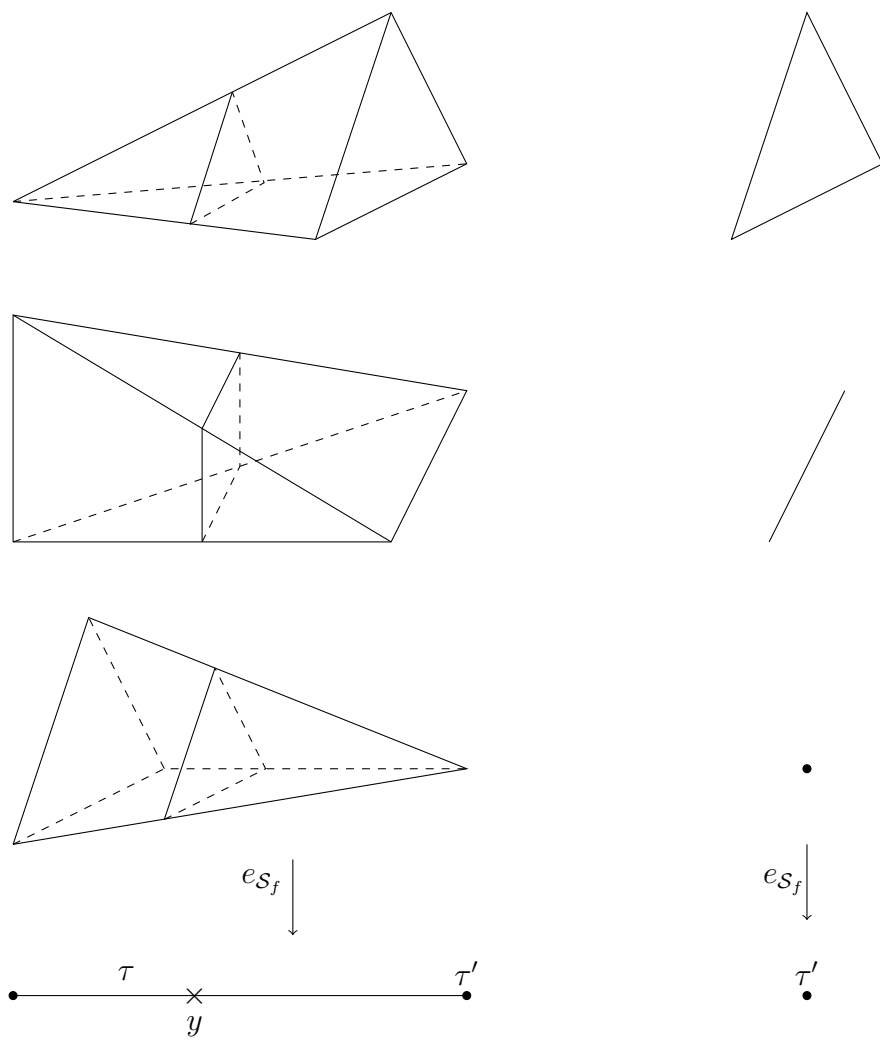


FIGURE 2 –  $\mathcal{S}_f$  au dessus de  $\tau$  et de  $\tau'$

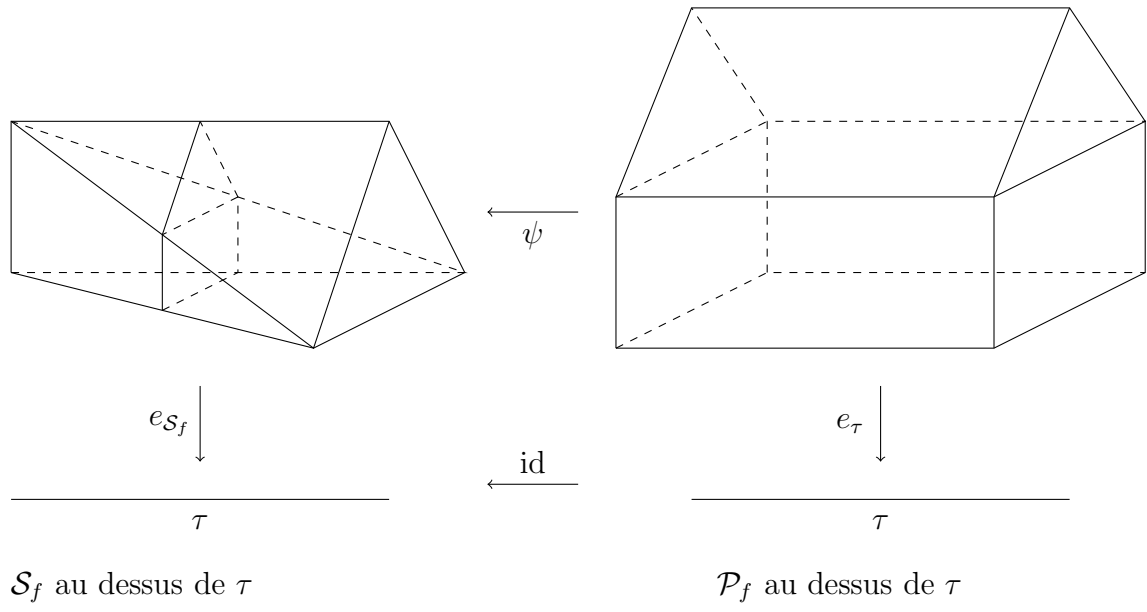


FIGURE 3 –  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{P}_f$  au dessus de  $\tau$

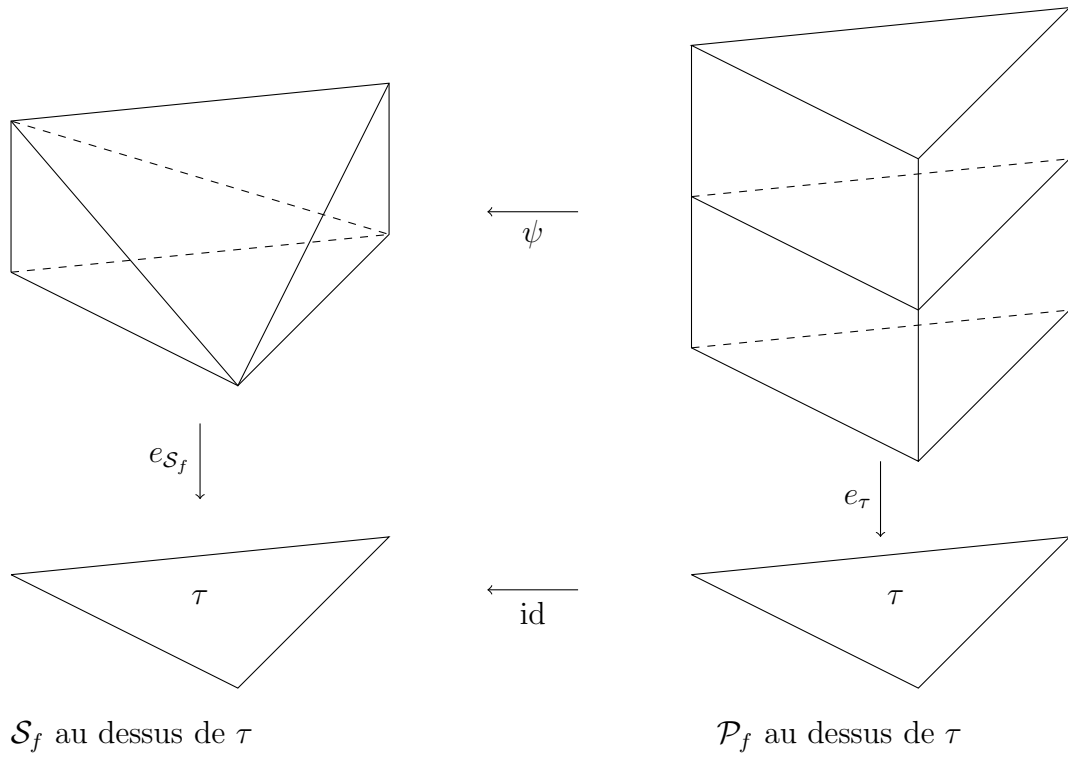


FIGURE 4 –  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{P}_f$  au dessus de  $\tau$

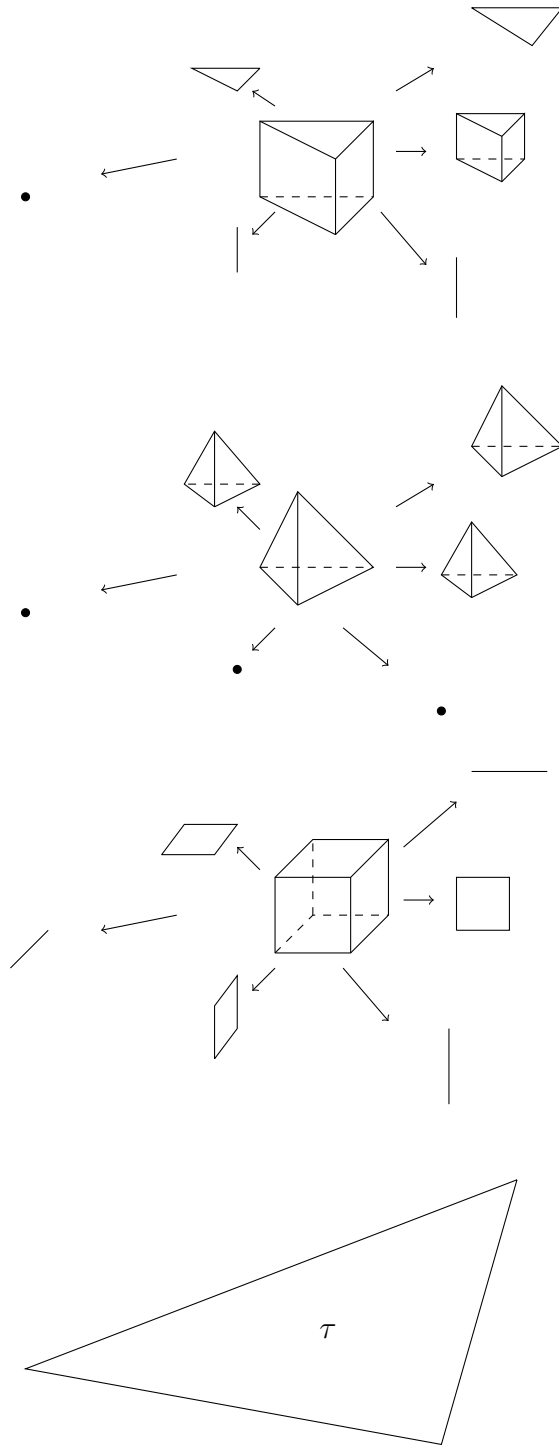


FIGURE 5 – Spécialisations possibles d'un 5-simplexe au dessus d'un 2-simplexe  $\tau$   
 On a dessiné les fibres au dessus des points génériques des différentes faces de  $\tau$ .

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}' & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{P}_f \\
& \searrow \psi' & \swarrow \psi \\
& \mathcal{S}_f & .
\end{array}$$

PREUVE. Montrons l'existence d'un morphisme de faisceaux prismaux  $\psi: \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$ . Un point d'un prisme est déterminé par ses coordonnées barycentriques dans chaque simplexe. Pour tout  $\sigma$  on a défini dans l'exemple 2.1 un morphisme prismal  $\psi^\sigma: \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$ . Les morphismes  $\psi^\sigma$  et  $\psi^{\sigma'}$  coïncident sur  $\pi(\sigma \cap \sigma')$ , et nous avons donc défini un morphisme prismal  $\psi_\tau: \mathcal{P}_f(\tau) \rightarrow f^{-1}(\tau) = \mathcal{S}_f(\tau)$ .

Entre autres, si  $\tau'$  est une face d'un simplexe  $\tau$ , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_f(\tau) & \xrightarrow{\psi_\tau} & \mathcal{S}_f(\tau) \\
\downarrow h_{\tau', \tau} & & \downarrow h_{\tau', \tau} \\
\mathcal{P}_f(\tau') & \xrightarrow{\psi_{\tau'}} & \mathcal{S}_f(\tau').
\end{array}$$

Le a) résulte alors de la Proposition 2.1 et de l'exemple 2.10.

Prouvons b); il suffit de vérifier l'énoncé restreint à un simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_f(\tau)$ . La définition de  $\mathcal{P}_f$  et la structure de produit de  $\pi(\sigma)$  impliquent que pour tout prisme  $\pi'$  de l'image inverse de  $\sigma$  par  $\psi'$ , on a une application naturelle de  $\pi'$  dans  $\pi(\sigma)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarques 2.12.** 1) Le morphisme  $\psi$  est essentiellement un éclatement comme le montre l'écriture locale  $\lambda_i = t_j \mu_{j,i}$ . En particulier, le morphisme  $\psi^\sigma: \pi(\sigma) \rightarrow \sigma$  n'est un isomorphisme que si  $\sigma$  est isomorphe à son image par  $f$ . Soulignons que le morphisme  $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \rightarrow \sigma_j$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_0 * \cdots * \sigma_s & \xleftarrow{\psi^\sigma} & \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \\
& \searrow \theta^{\sigma_j} & \swarrow \text{pr}_j \\
& \sigma_j &
\end{array}$$

où  $\theta^{\sigma_j}$  désigne le morphisme introduit en (2.4), est bien la  $j$ -ème projection  $\text{pr}_j$  du produit.

2) Le jacobien de l'application  $\psi^\sigma$  est égal à :

$$t_0^{|\sigma_0|} t_1^{|\sigma_1|} \cdots t_s^{|\sigma_s|}.$$

3) La catégorie des ensembles et morphismes prismaux est "la plus petite" catégorie contenant celle des ensembles et morphismes simpliciaux et dans laquelle on a existence et unicité à isomorphisme près du produit fibré.

L'existence du produit fibré découle du fait que, puisque les applications prismales sont linéaires sur chaque simplexe, le sous-ensemble d'un produit  $\pi_1 \times \pi_2$  de prismes défini par la condition  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ , où  $f_1: \pi_1 \rightarrow \tau$  et  $f_2: \pi_2 \rightarrow \tau$  sont des morphismes prismaux, est un prisme. La vérification de la propriété universelle est immédiate.

*Caractérisation des faisceaux prismaux provenant de morphismes simpliciaux*

**Définitions 2.13.** a) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau prismal sur un complexe simplicial  $T$ , on dit que le prisme  $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$  est trivial s'il s'écrit  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  ;

b) On appelle *dimension relative* d'un prisme  $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$  et on note  $\dim_{rel}(\pi)$ , la différence  $\dim \pi - \dim \tau$ .

c) On dit que le prisme  $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$  est *équidimensionnel* au dessus d'une face  $\tau'$  de  $\tau$  si la dimension relative de  $\pi|_{\tau'}$  est égale à celle de  $\pi$ .

Un prisme de dimension relative nulle est équidimensionnel au dessus de toutes les faces de  $\tau$ . Le morphisme  $\sigma_1 \rightarrow \tau_1$  de la figure 1 n'est pas équidimensionnel au dessus du sommet  $y_0$  de  $\tau_1$ .

**Proposition 2.14** (Caractérisation des faisceaux de la forme  $\mathcal{S}_f$ ). *Un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  sur un complexe simplicial  $T$  est de la forme  $\mathcal{S}_f$ , pour un morphisme simplicial  $f : X \rightarrow T$ , si et seulement si :*

1. *Tous les prismes de  $\mathcal{F}$  sont des simplexes,*
2. *Pour tout couple  $\tau' < \tau$  de simplexes de  $T$ , et tout simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{F}(\tau)$ , le morphisme  $h_{\tau',\tau} : \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \mathcal{F}(\tau')$  est surjectif et on a un isomorphisme simplicial  $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$ .*

PREUVE. Le fait que les conditions 1) et 2) soient nécessaires résulte aussitôt de la construction de l'exemple 2.9. Montrons qu'elles sont suffisantes ; nous construisons l'espace  $X$  de la définition 1.1 par recollement. Notons  $X_\tau = e_\tau^{-1}(\tau)$ , alors pour toute face  $\tau'$  de  $\tau$ , on a  $X_\tau|_{\tau'} = X_{\tau'} = h_{\tau',\tau}(X_\tau)$ . Définissons l'espace  $X$  comme quotient de la réunion des  $X_\tau$  par la relation d'identification des restrictions au dessus des faces des simplexes de  $T$ . L'application  $f : X \rightarrow T$  est naturellement définie.  $\square$

**Lemme 2.15.** *Considérons le faisceau prismal  $\mathcal{S}_f$  de base  $T$ . Pour tout couple  $\tau' < \tau$  de simplexes de  $T$ , et tout simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_f(\tau)$ , on a équivalence des propriétés suivantes :*

- (i)  $\dim_{rel} h_{\tau',\tau}(\sigma) = \dim_{rel}(\sigma)$
- (ii)  $\sigma$  est équidimensionnel au dessus de la face  $\tau'$ .
- (iii) Si  $\tau''$  est la face opposée de  $\tau'$  dans  $\tau$ , la projection  $\sigma|_{\tau''} \rightarrow \tau''$  est un isomorphisme.

PREUVE. Considérons  $\tau$  comme le joint de  $\tau'$  et de sa face opposée  $\tau''$ . Puisque

$$\dim \sigma = \dim \sigma|_{\tau'} + \dim \sigma|_{\tau''} + 1$$

et  $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$ , l'assertion (i) est équivalente à dire que  $\sigma|_{\tau''}$  est isomorphe à  $\tau''$  d'où le résultat (voir Figures 1 et 3).  $\square$

**Proposition 2.16** (Caractérisation des faisceaux du type  $\mathcal{P}_f$ ). *Un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  sur un complexe simplicial  $T$  est de type  $\mathcal{P}_f$  où  $f : X \rightarrow T$  est un morphisme simplicial si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

- a) *Tout prisme  $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$  est le produit de simplexes  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  avec  $s = \dim \tau$ ,*
- b) *Si  $\tau' < \tau$  le morphisme  $h_{\tau',\tau} : \mathcal{F}(\tau) \rightarrow \mathcal{F}(\tau')$  est surjectif et si un prisme  $\pi \in \mathcal{F}(\tau)$  s'écrit  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ , alors on a  $h_{\tau',\tau}(\pi) = \tau' \times \sigma'_0 \times \cdots \times \sigma'_k$  où chaque  $\sigma'_\beta$  est l'un des  $\sigma_\alpha$ .*

PREUVE. Si un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  est de type  $\mathcal{P}_f$ , il vérifie a) et b) par construction. Montrons la réciproque. Soit donc un faisceau prismal  $\mathcal{F}$  satisfaisant a) et b). On lui associe un faisceau prismal  $\mathcal{S}$  de base  $T$  de la façon suivante : les prismes de  $\mathcal{S}(\tau)$  sont les joints itérés  $\sigma_0 * \dots * \sigma_s$  des simplexes apparaissant dans les prismes  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  de  $\mathcal{F}$ . Ce sont donc des simplexes. La propriété b) implique que, pour tout simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{S}(\tau)$  et pour toute face  $\tau'$  de  $\tau$ , on a  $h_{\tau',\tau}(\sigma) \cong \sigma|_{\tau'}$ . D'après la proposition 2.14, le faisceau  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S}_f$  et le faisceau  $\mathcal{F}$  est le faisceau  $\mathcal{P}_f$  qui lui est associé par la construction de l'exemple 2.10.  $\square$

**Remarque 2.17.** Pour tout prisme  $\pi$  de  $\mathcal{P}_f(\tau)$  et pour tout sommet  $\{y\}$  de  $\tau$ , on a  $h_{\{y\},\tau}(\pi) = \{y\} \times \sigma_{i(y)}$  où  $\sigma_{i(y)}$  est le simplexe  $\psi(\pi) \cap (e_\tau)^{-1}(\{y\})$  de  $\mathcal{S}_f$ .

**Corollaire 2.18.** *Considérons le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  de base  $T$ . Pour tout couple  $\tau' < \tau$  de simplexes de  $T$ , et tout prisme  $\pi$  de  $\mathcal{P}_f(\tau)$ , on a l'équivalence des propriétés suivantes :*

- i)  $\dim_{rel} h_{\tau',\tau}(\pi) = \dim_{rel}(\pi)$
- ii)  $h_{\tau',\tau}(\pi) = \pi|_{\tau'}$
- iii)  $\psi(\pi)$  est équidimensionnel au dessus de la face  $\tau'$ .

PREUVE. La proposition 2.16 et la remarque 2.17 impliquent l'équivalence de (i) et (ii), la proposition 2.14 et le fait que  $\dim \psi(\pi) = \dim \pi$  impliquent l'équivalence de (i) et (iii).  $\square$

**Corollaire 2.19.** *Considérons le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  de base  $T$ . Pour tout simplexe  $\tau$  de  $T$ , et tout prisme  $\pi$  de  $\mathcal{P}_f(\tau)$ , on a l'équivalence des propriétés suivantes :*

- i)  $\psi(\pi)$  est équidimensionnel en un sommet  $y_0$  de  $\tau$ .
- ii)  $\pi$  est isomorphe au dessus de  $\tau$  à un produit  $\tau \times \sigma_\pi$ .

PREUVE. Le corollaire est une conséquence directe de la proposition 2.16 et de la remarque 2.17. Le simplexe  $\sigma_\pi$  du (ii) est  $\psi(\pi) \cap (e_\tau)^{-1}(\{y_0\})$  de  $\mathcal{S}_f$  où  $\{y_0\}$  est le sommet de  $\tau$  du (i) (voir Figures 1 et 3).  $\square$

## 3 Formes de Whitney

### 3.1 Formes régulières, höldériennes et sous-analytiques

Soient  $N$  un entier et  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ . On dira qu'une fonction  $g$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^N$  est *höldérienne d'exposant  $\alpha$*  si tout point de  $U$  possède un voisinage  $V$  dans  $U$  tel qu'il existe une constante positive  $C_V$  telle que pour tous  $(x, x')$  dans  $V$ , on ait l'inégalité

$$|g(x) - g(x')| \leq C_V |x - x'|^\alpha.$$

Soit  $\mu \geq 0$  un entier. Suivant Whitney [Whi], nous dirons qu'une  $r$ -forme différentielle sur  $U$  est  $\mu$ -régulière si elle est continue sur  $U$  et satisfait les conditions suivantes :

- Si  $\mu = 0$ , il existe une  $(r+1)$ -forme  $\xi$  continue sur  $U$  telle que l'on ait

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma \xi$$



pour tout  $(r+1)$ -simplexe  $\sigma$  contenu dans  $U$ . D'après le lemme 16a de [Whi, Ch.III, p.104], la forme  $\xi$  est uniquement déterminée par cette condition ; on la notera  $d\omega$  et on l'appellera, suivant Whitney, *forme dérivée* de  $\omega$ .

- Si  $\mu$  est  $> 0$ ,  $\omega$  et  $d\omega$  sont différentiables de classe  $\mathcal{C}^\mu$ .

Une forme  $\omega$  est *höldérienne* si elle est 0-régulière et si les coefficients de  $\omega$  et  $\xi$  sont des fonctions höldériennes sur  $U$ .

**Définition 3.1.** Soit  $h$  une fonction sous-analytique continue sur le compact sous-analytique  $K \subset \mathbf{R}^N$  d'intérieur non vide. Par hypothèse le graphe de  $h$  est un sous-ensemble sous-analytique fermé  $\Gamma$  de  $K \times \mathbf{P}^1$  contenu dans  $K \times \mathbf{R}$ . D'après [D], [D-W], le transformé de Semple-Nash  $ST$  de  $\Gamma$  est sous-analytique dans  $\Gamma \times \mathbf{P}^N$ . Il y est fermé et est donc compact. Au dessus des points d'analyticité de  $\Gamma$ , l'espace  $ST$  est le lieu des points  $(x, h(x), [\frac{\partial h}{\partial x_1} : \dots : \frac{\partial h}{\partial x_N} : -1])$ . Notons  $H_\infty$  l'hyperplan de  $\mathbf{P}^N$  correspondant à la dernière coordonnée de  $K \times \mathbf{R}$ , et  $\mathbf{R}^N \subset \mathbf{P}^N$  l'espace affine complémentaire. Si  $ST$  se trouve être contenu dans  $\Gamma \times \mathbf{R}^N \subset \Gamma \times \mathbf{P}^N$ , nous dirons que la fonction  $h$  est à *dérivées bornées* sur  $K$ .

**Proposition 3.2.** Si  $h$  est à dérivées partielles bornées, les dérivées partielles de  $h$  au sens des distributions sont représentées par des fonctions sous-analytiques bornées sur  $K$ .

PREUVE. En effet l'image de  $ST \subset \Gamma \times \mathbf{R}^N$  dans  $\Gamma \times \mathbf{R}$  par la projection sur la  $i$ -ième coordonnée est encore sous-analytique comme projection d'un ensemble sous-analytique compact et c'est le graphe d'une fonction sous-analytique sur  $Z$  qui est un représentant de la dérivée au sens des distributions  $\frac{\partial h}{\partial u_i}$ , puisque les deux coïncident sur l'ouvert d'analyticité de la fonction  $h$  dont le complémentaire est de mesure nulle.  $\square$

**Définition 3.3.** Une forme  $\omega$  est *sous-analytique* si elle est 0-régulière et si les coefficients de  $\omega$  et  $\xi$  sont des fonctions sous-analytiques bornées sur  $U$ . Elle est sous-analytique continue si ses coefficients sont continus (mais pas nécessairement ceux de sa différentielle, car imposer cela empêcherait les formes de Whitney d'être continues).

**Proposition 3.4.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ , pour une forme différentielle  $\omega$  définie sur  $U$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) la forme  $\omega$  est 0-régulière dans  $U$ , ses coefficients sont sous-analytiques et bornés et ceux de sa forme dérivée sont sous-analytiques.
- ii) les coefficients de la forme  $\omega$  sont sous-analytiques et bornés et sa différentielle au sens des distributions admet un représentant sous-analytique.

PREUVE. (i) implique (ii) : La formule de Stokes pour les courants implique que la différentielle au sens des distributions satisfait

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$$

On en déduit que  $d\omega$  admet comme représentant la forme dérivée de  $\omega$  qui est sous-analytique.

(ii) implique (i) : Pour les mêmes raisons, un représentant sous-analytique de la différentielle au sens des distributions doit coïncider avec la forme dérivée de  $\omega$  ce qui montre que  $\omega$  est sous-analytique.  $\square$

Rappelons que d'après *loc. cit.*, lorsque  $\mu$  est égal à zéro, une forme  $\omega$  est régulière et  $d\omega$  admet pour représentant  $\xi$  si et seulement s'il existe une suite  $\omega_i$  de formes de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  telle que, uniformément sur tout compact,  $\omega_i$  tende vers  $\omega$  et des représentants de  $d\omega_i$  tendent vers  $\xi$  au sens des courants. Whitney en déduit que si  $f$  est un morphisme  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^N$  dans  $\mathbf{R}^p$  et  $\omega$  une forme régulière sur un voisinage de l'image de  $U$ , alors  $f^*\omega$  est régulière dans  $U$ .

### 3.2 Formes différentielles sur les complexes simpliciaux et les ensembles prismaux

Soit  $\Delta$  un complexe simplicial linéaire dans  $\mathbf{R}^N$ . Une  $r$ -forme différentielle sur  $\Delta$  est la donnée pour tout simplexe  $\sigma$  de  $\Delta$  d'une  $r$ -forme  $\omega_\sigma$  définie sur  $\sigma$ , c'est-à-dire que  $\omega_\sigma$  est une section définie sur  $\sigma$  du fibré  $\Lambda^r T^* \mathbf{R}^N$  de telle manière que, pour toute face  $i : \sigma' \hookrightarrow \sigma$  de tout simplexe  $\sigma$  de  $\Delta$ , on ait  $\omega_\sigma|_{\sigma'} = \omega_{\sigma'}$ . Soulignons qu'il s'agit ici de la restriction à  $\sigma'$  des coefficients de  $\omega(\sigma)$  et non pas de l'image réciproque  $i^*(\omega(\sigma))$  par l'inclusion de  $\sigma'$  dans  $\sigma$ .

Le faisceau des formes différentielles sur  $\mathbf{R}^N$  est mou (voir [God, Chap.II, Exemple 3.7.1]). Rappelons que ceci signifie que toute forme différentielle définie sur un fermé se prolonge à l'espace tout entier. On peut donc supposer que toute forme différentielle sur  $\Delta$  est obtenue en restreignant à chaque simplexe  $\sigma$  de  $\Delta$  une forme différentielle définie sur un voisinage ouvert de  $\sigma$  de telle façon que les restrictions de deux telles formes sur leur ouvert de définition commun coïncident.

Nous considérerons ici des formes différentielles  $\omega$  dont les coefficients sont des fonctions sous-analytiques sur  $\Delta$  analytiques dans l'intérieur de chaque simplexe.

La définition des formes différentielles s'étend aussitôt aux ensembles prismaux :

**Définition 3.5.** Soit  $\Pi$  un ensemble prismaal. On appelle  $r$ -forme différentielle  $\mu$ -régulière (resp. sous-analytique) sur  $\Pi$  la donnée pour chaque prisme  $\pi$  de  $\Pi$  d'une  $r$ -forme différentielle  $\mu$ -régulière (resp. sous-analytique) sur un voisinage ouvert de  $\pi$  dans l'un de ses plongements affines, de telle façon que les formes différentielles correspondant à deux prismes coïncident dans un voisinage de leur intersection dans un plongement affine commun.

Clairement, la définition ne dépend pas des plongements choisis.

### 3.3 Formes de Whitney sur les complexes simpliciaux

Notons  $a_i$  les sommets du complexe simplicial  $\Delta$ ; tout point  $x$  de  $\Delta$  s'écrit  $x = \sum \lambda_i(x) a_i$  où les coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  satisfont  $\lambda_i(x) \geq 0$  et  $\sum_i \lambda_i(x) = 1$ . Le support de  $\lambda_i$  est l'étoile ouverte de  $a_i$  dans  $\Delta$ . Nous allons, comme Whitney, construire une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert de  $\Delta$  constitué des étoiles des sommets de  $\Delta$ .

Pour tout  $i$ , on note  $F_i$  l'ensemble des points de  $\Delta$  dont la  $i$ -ième coordonnée barycentrique  $\lambda_i(x)$  est  $\geq \frac{1}{N+1}$  et  $G_i$  l'ensemble des points de  $\Delta$  dont la  $i$ -ième coordonnée barycentrique  $\lambda_i(x)$  est  $\leq \frac{1}{N+2}$ .

Il existe des fonctions  $\phi'_i$ , définies au voisinage de  $\Delta$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins, telles que  $\phi'_i$  soit positive dans  $F_i$  et nulle dans  $G_i$ . Les restrictions à  $\Delta$  des fonctions  $\phi_i = \frac{\phi'_i}{\sum_j \phi'_j}$  forment une partition de l'unité  $(U_i, \phi_i)$  où  $U_i$  désigne le complémentaire de  $G_i$ .

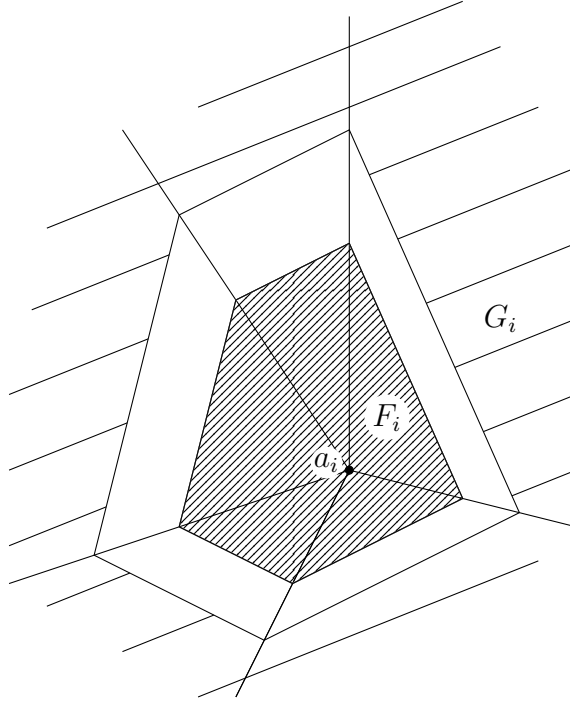


FIGURE 6 – Les ensembles  $F_i$  et  $G_i$

Soit  $\sigma$  un simplexe orienté de  $\Delta$ , de dimension  $p$  et dont les sommets sont  $(a_0, \dots, a_p)$ ; on définit la  $p$ -forme différentielle de Whitney associée à  $\sigma$  et à la partition de l'unité  $(U_i, \phi_i)$ , par la formule

$$\tilde{\omega}(\sigma) = p! \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi_i d\phi_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\phi_i} \wedge \dots \wedge d\phi_p.$$

**Remarques 3.6.** 1. La forme différentielle  $\tilde{\omega}(\sigma)$  est de classe égale à la classe des  $\phi'_i$ .  
 2. La forme de Whitney construite en utilisant les fonctions coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  sur  $\sigma$  à la place des  $\phi_i$  est la forme volume de  $\sigma$ . Les  $\lambda_i$  ne sont que lipschitziennes sur  $\Delta$ ; les  $\phi_i$  servent à les lisser.

Dans cet article, où nous nous plaçons dans le cadre sous-analytique, nous utiliserons les formes de Whitney “non lissées”

$$\omega(\sigma) = p! \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_p.$$

Ceci est justifié par la proposition :

**Proposition 3.7.** *La forme de Whitney  $\omega(\sigma)$  a pour support l'étoile de  $\sigma$  dans  $\Delta$ , réunion des étoiles des sommets de  $\sigma$ . Elle est linéaire par morceaux et continue, donc sous-analytique et continue. Sa différentielle au sens des distributions admet un représentant sous-analytique borné.*

PREUVE. Chacune des fonctions  $\lambda_i$  ayant pour support l'étoile du sommet  $a_i$ , la forme  $\omega(\sigma)$  a donc pour support la réunion de ces étoiles, à savoir l'étoile de  $\sigma$ . Les fonctions  $\lambda_i$  sont linéaires par morceaux et continues, les 1-formes différentielles  $d\lambda_i$ , définies au sens des distributions admettent un représentant sous-analytique et borné. Un calcul simple montre que

$$d\omega(\sigma) = (p+1)! d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge d\lambda_p. \quad (3.1)$$

laquelle forme différentielle a pour support l'étoile de  $\sigma$  et jouit des mêmes propriétés.  $\square$

### 3.4 Formes de Whitney sur les ensembles prismaux

Soit  $\rho = \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_k$  un prisme orienté de l'ensemble prismal  $\Pi$ . Notons  $pr_j$  la projection de  $\pi$  sur  $\sigma_j$ ; on définit la forme de Whitney  $\omega(\rho)$  par

$$\omega(\rho) = pr_0^* \omega(\sigma_0) \wedge \cdots \wedge pr_k^* \omega(\sigma_k).$$

Par la suite, nous omettrons les “ $pr_j$ ” sans que cela ne prête à ambiguïté.

En particulier, la forme de Whitney du prisme  $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  s'écrit

$$\omega(\pi(\sigma)) = \omega(\tau) \wedge \omega(\sigma_0) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s) \quad (3.2)$$

Replaçons nous dans la situation de la proposition 2.1 avec un morphisme  $f : \Delta \rightarrow T$  que nous supposons orienté. Soit  $\sigma$  un  $p$ -simplexe orienté de  $\Delta$ , la forme de Whitney  $\omega(\sigma)$  s'écrit :

$$\omega(\sigma) = p! \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \cdots \wedge d\lambda_p$$

où les  $\lambda_i$  sont les coordonnées barycentriques correspondant aux sommets  $a_i$  de  $\sigma$ . Nous avons vu que les composantes prismales d'un point de  $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  s'écrivent  $\sum_{j=0}^s t_j y_j$  dans  $\tau$ , et  $\sum_{i \in I(j)} \mu_{j,i} a_i$  dans  $\sigma_j$ . L'application  $\psi^\sigma$  associe à ce point le point de  $\sigma$  ayant pour coordonnées barycentriques les  $\lambda_{j,i} = t_j \mu_{j,i}$  (où  $j$  est tel que  $i \in I(j)$ ). Les coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  correspondant à la composante  $\sigma_j$  seront notées  $\lambda_{j,i_j}$  avec  $i_j = 0, \dots, \alpha_j = \dim \sigma_j$ .

Regroupons les coordonnées de  $\sigma$  par coordonnées correspondant à chacun des  $\sigma_j$ ,  $\omega(\sigma)$  devient :

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) = & (-1)^{a(\nu)} p! \sum_{j=0}^s \sum_{\ell=0}^{\alpha_j} (-1)^{\beta(j,\ell)} \lambda_{j,\ell} \underbrace{d\lambda_{0,0} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{0,\alpha_0}}_{\sigma_0} \wedge \cdots \wedge \\ & \underbrace{d\lambda_{j,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\lambda_{j,\ell}} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{j,\alpha_j}}_{\sigma_j} \wedge \cdots \wedge \underbrace{d\lambda_{s,0} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{s,\alpha_s}}_{\sigma_s} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où l'ensemble des  $p+1$  couples  $(j, i_j)$  est en bijection avec  $(0, 1, \dots, p)$  et  $a(\nu)$  est la signature de la permutation

$$\nu : (0, 1, \dots, p) \rightarrow ((0, 0), \dots, (0, \alpha_0), (1, 0), \dots, (1, \alpha_1), \dots, (s, 0), \dots, (s, \alpha_s));$$

enfin  $\beta(j, \ell) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-1} + j + \ell$  ( $0 \leq \ell \leq \alpha_j$ ). Remarquons que  $\nu$  exprime la compatibilité de l'orientation de  $\sigma$  avec celle du joint  $\sigma_0 * \cdots * \sigma_s$  des simplexes orientés  $\sigma_j$  (voir section 2).

**Proposition 3.8.** *Reprenons les notations du théorème 2.11. Une orientation des simplexes  $\sigma_j$  et une orientation de  $\tau$  induisent une orientation de  $\sigma$  comme joint itéré (voir section 2). On a l'égalité*

$$(\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma)) = (-1)^{\alpha(\sigma,\nu)} \frac{p!}{|\sigma_0|! \cdots |\sigma_s|! s!} t_0^{|\sigma_0|} \cdots t_s^{|\sigma_s|} \omega(\pi(\sigma))$$

où  $\alpha(\sigma, \nu) = s|\sigma_0| + (s-1)|\sigma_1| + \cdots + |\sigma_{s-1}| + a(\nu)$  et les  $(t_j)_{j=0,\dots,s}$  sont les coordonnées barycentriques de  $\tau$ .

PREUVE. Tout d'abord, on remarque que, pour chacune des coordonnées  $\lambda_{j,i}$ , on a :

$$(\psi^\sigma)^*(d\lambda_{j,i}) = dt_j \mu_{j,i} + t_j d\mu_{j,i} \quad (3.4)$$

d'autre part, pour tout  $k = 0, \dots, s$ , on a :

$$\sum_{i \in I(k)} \mu_{k,i} = 1 \quad \text{donc} \quad d\mu_{k,0} \wedge \cdots \wedge d\mu_{k,\alpha_k} = 0,$$

où  $\alpha_k$  est  $\dim \sigma_k = |\sigma_k| = \text{card}(I(k))$ .

Reprenons l'expression de  $\omega(\sigma)$  donnée par la formule (3.3). Pour chaque terme de la somme, c'est-à-dire pour  $j$  fixé, la contribution des produits des différentielles provenant de  $\sigma_j$  se calcule de façon différente de celle des produits des différentielles provenant des autres simplexes  $\sigma_k$ . Plus précisément, au vu de (3.4), nous vérifions la formule suivante pour  $k \neq j$  :

$$(\psi^\sigma)^* d\lambda_{k,0} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{k,\alpha_k} = (t_k)^{\alpha_k} \sum_{i_k=0}^{\alpha_k} (-1)^{i_k} \mu_{k,i_k} dt_k \wedge d\mu_{k,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mu_{k,i_k}} \wedge \cdots \wedge d\mu_{k,\alpha_k}. \quad (3.5)$$

Donc, pour  $j$  fixé, et pour  $k$  différent de  $j$ , tous les produits de différentielles associés aux simplexes  $\sigma_k$  contiennent le terme  $dt_k$  correspondant.

Pour déterminer la contribution des termes de la formule (3.3) provenant de  $\sigma_j$ , remarquons que

$$\sum_{j=0}^s t_j = 1, \quad \text{donc on a} \quad dt_0 \wedge \cdots \wedge dt_s = 0. \quad (3.6)$$

Comme on vient de le voir, tous les termes  $dt_k$ , sauf  $dt_j$ , apparaissent déjà dans l'expression de  $(\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma))$ . La formule (3.6) montre que les termes provenant de  $\sigma_j$  et qui contiennent  $dt_j$  ont une contribution nulle. La seule contribution non nulle du développement de

$$(\psi^\sigma)^*(d\lambda_{j,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\lambda_{j,\ell}} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{j,\alpha_j}).$$

est donc :

$$(t_j)^{\alpha_j} d\mu_{j,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mu_{j,\ell}} \wedge \cdots \wedge d\mu_{j,\alpha_j}. \quad (3.7)$$

En reportant (3.5) et (3.7) dans (3.3), il vient :

$$\begin{aligned} (\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma)) &= (-1)^{a(\nu)} p! (t_0)^{\alpha_0} \cdots (t_s)^{\alpha_s} \sum_{j=0}^s (-1)^{\alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-1} + j} t_j \\ &\quad \left( \sum_{i_0=0}^{\alpha_0} (-1)^{i_0} \mu_{0,i_0} dt_0 \wedge d\mu_{0,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mu_{0,i_0}} \wedge \cdots \wedge d\mu_{0,\alpha_0} \right) \wedge \cdots \wedge \\ &\quad \left( \sum_{\ell=0}^{\alpha_j} (-1)^\ell \mu_{j,\ell} d\mu_{j,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mu_{j,\ell}} \wedge \cdots \wedge d\mu_{j,\alpha_j} \right) \wedge \cdots \wedge \\ &\quad \left( \sum_{i_s=0}^{\alpha_s} (-1)^{i_s} \mu_{s,i_s} dt_s \wedge d\mu_{s,0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\mu_{s,i_s}} \wedge \cdots \wedge d\mu_{s,\alpha_s} \right) \end{aligned}$$

Chacune des parenthèses, sauf la  $j$ -ème, est égale à  $\frac{1}{\alpha_k!} dt_k \wedge \omega(\sigma_k)$ . Arrivé ici, nous savons que nous pouvons écrire :

$$(\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma)) = (-1)^{a(\nu)} \frac{p!}{\alpha_0! \cdots \alpha_s!} (t_0)^{\alpha_0} \cdots (t_s)^{\alpha_s} \left( \sum_{j=0}^s (-1)^{\alpha(\sigma)+j} t_j dt_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \cdots \wedge dt_s \right) \wedge \omega(\sigma_0) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s),$$

où nous avons noté  $\alpha(\sigma) = s\alpha_0 + (s-1)\alpha_1 + \cdots + \alpha_{s-1}$ . Le signe est donné par le nombre de permutations qui permettent cette écriture de  $(\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma))$ . De façon précise : le terme  $dt_0$  est en première place, il faut faire  $\alpha_0$  permutations pour ramener  $dt_1$  en deuxième place,  $\alpha_0 + \alpha_1$  permutations pour ramener  $dt_2$  en troisième place, ainsi jusqu'à  $dt_{j-1}$ , lequel nécessite  $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-2}$  permutations pour venir en  $j$ -ème place. Ensuite, pour ramener  $dt_{j+1}$  en  $(j+1)$ -ème place, il faut  $\alpha_0 + \cdots + \alpha_j$  permutations, ainsi jusqu'à  $dt_s$  lequel nécessite  $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{s-1}$  permutations pour venir en  $s$ -ème place. On en déduit le résultat.  $\square$

### 3.5 Formes de Whitney et formes relatives

Considérons le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  associé à un morphisme simplicial  $f$ . Soit  $\pi \in \mathcal{P}_f(\tau)$ , de la forme  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ .

Montrons maintenant comment  $\omega(\sigma)$  s'exprime en fonction de  $\omega(\sigma')$  pour toute face  $\sigma'$  de  $\sigma$  et plus généralement  $\omega(\rho)$  en fonction de  $\omega(\rho')$  pour toute face  $\rho'$  d'un prisme  $\rho$ .

Fixons d'abord quelques notations : Soit  $\sigma$  un  $p$ -simplexe orienté de sommets  $a_0, \dots, a_p$  et notons  $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$  les coordonnées barycentriques correspondantes. A toute face  $\sigma'$  de  $\sigma$ , de sommets  $(a_{i_0}, \dots, a_{i_q})$ , on associe la forme différentielle suivante définie sur  $\sigma$  :

$$\omega(\sigma'; \sigma) = q! \sum_{k=0}^q (-1)^k \lambda_{i_k} d\lambda_{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{d\lambda_{i_k}} \wedge \cdots \wedge d\lambda_{i_q}.$$

La restriction de  $\omega(\sigma'; \sigma)$  à  $\sigma'$  est la forme de Whitney de  $\sigma'$  ; la forme différentielle  $\omega(\sigma'; \sigma)$  n'est autre que l'extension à  $\sigma$  tout entier de l'écriture de la forme de Whitney de  $\sigma'$ . En ce sens elle constitue une extension canonique de  $\omega(\sigma')$  à  $\sigma$ .

**Remarque 3.9.** On peut définir une telle extension pour tout simplexe de l'étoile  $\text{St}_\Delta \sigma'$  de  $\sigma'$ , et les formes ainsi définies coïncident sur l'intersection de deux des simplexes de cette étoile. On obtient ainsi une forme différentielle  $\omega(\sigma'; \text{St}_\Delta \sigma')$ .

**Lemme 3.10.** a) Pour une face  $\sigma'$  de codimension 1 d'un simplexe orienté  $\sigma$ , on a :

$$d\omega(\sigma'; \sigma) = [\sigma; \sigma'] \omega(\sigma).$$

b) La forme de Whitney d'une face  $\pi'$  de codimension 1 d'un prisme orienté  $\pi$  est la restriction à cette face d'une forme différentielle  $\omega(\pi'; \pi)$  canoniquement définie sur ce prisme et dont la différentielle est égale à la forme de Whitney du prisme, au facteur  $[\pi; \pi']$  près, autrement dit :

$$d\omega(\pi'; \pi) = [\pi; \pi'] \omega(\pi).$$

c) Notons  $L(\pi)$  l'espace vectoriel des formes différentielles de degré  $|\pi| - 1$  dont les coefficients sont des fonctions linéaires en les coordonnées barycentriques des simplexes  $\sigma_i$  constituant  $\pi$  et dont la restriction à chaque face de codimension 1 est un multiple scalaire de la forme de Whitney de cette face. La collection des formes  $\omega(\pi'; \pi)$  pour toutes les faces  $\pi'$  de codimension 1 de  $\pi$  forme une base de  $L(\pi)$ .

PREUVE. Démontrons d'abord l'égalité du a). Sans perte de généralité, on peut supposer que les coordonnées barycentriques de  $\sigma$  sont  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  et celles de  $\sigma'$  sont  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ . D'une part la forme de Whitney de  $\sigma'$  s'écrit

$$\omega(\sigma') = (p-1)! \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_{p-1}$$

et cette même écriture définit la forme  $\omega(\sigma'; \sigma)$  sur  $\sigma$ . Il vient (voir (3.1))

$$d\omega(\sigma'; \sigma) = p! d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{p-1}.$$

D'autre part, en remplaçant  $\lambda_p$  par  $1 - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i$  et  $d\lambda_p$  par  $-\sum_{i=0}^{p-1} d\lambda_i$ , dans l'expression de  $\omega(\sigma)$ , on a

$$\omega(\sigma) = p! \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_p = (-1)^p p! d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{p-1}. \quad (3.8)$$

On en déduit le résultat puisque, dans ce cas  $[\sigma; \sigma'] = (-1)^p$ .

Prouvons b) et supposons que  $\pi' = \sigma_0 \times \dots \times \sigma'_i \times \dots \times \sigma_s$  soit une face de codimension 1 de  $\pi = \sigma_0 \times \dots \times \sigma_i \times \dots \times \sigma_s$ , alors

$$\omega(\pi'; \pi) = \omega(\sigma_0) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma'_i; \sigma_i) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma_s)$$

et donc

$$d\omega(\pi'; \pi) = \sum_{j=0}^s (-1)^{|\sigma_0| + \dots + |\sigma_{j-1}|} \omega(\sigma_0) \wedge \dots \wedge d\omega(\sigma_j) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma'_i; \sigma_i) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma_s)$$

(où, bien entendu, pour  $j = i$ ,  $d\omega(\sigma_j) = d\omega(\sigma'_i; \sigma_i)$ ). Sur  $\pi$ , toutes les formes différentielles  $d\omega(\sigma_j)$ , pour  $j \neq i$ , sont nulles car la somme des coordonnées barycentriques intervenant dans  $\sigma_j$  est égale à 1 dans  $\pi$ . D'autre part, le calcul précédent montre que  $d\omega(\sigma'_i; \sigma_i) = [\sigma_i; \sigma'_i] \omega(\sigma_i)$ , d'où le résultat d'après le Lemme 2.7.

Prouvons l'assertion c). Puisqu'une forme de degré maximum sur un simplexe, dépendant linéairement des coefficients, est un multiple scalaire de la forme de Whitney, on a l'égalité :

$$L(\pi) = \bigoplus_{i=0}^s \mathbf{R} \omega(\sigma_0) \wedge \dots \wedge L(\sigma_i) \wedge \dots \wedge \mathbf{R} \omega(\sigma_s).$$

Nous sommes donc ramenés au cas d'un simplexe  $\sigma$ . Soit  $\omega \in L(\sigma)$ ; sur chacun des simplexes  $\sigma'_k$  de codimension 1 du bord de  $\sigma$ , on a  $\omega|_{\sigma'_k} = \lambda_k \omega(\sigma'_k)$  et donc  $\omega - \sum \lambda_k \omega(\sigma'_k) = 0$  sur le bord de  $\sigma$ . Puisque, pour  $k' \neq k$ , on a  $\omega(\sigma'_k; \sigma)|_{\sigma'_{k'}} = 0$ , il vient

$$\left( \omega - \sum_{\sigma'_k \subset \partial \sigma} \lambda_k \omega(\sigma'_k; \sigma) \right) \Big|_{\partial \sigma} = 0.$$

Puisque cette dernière forme est linéaire en les coordonnées barycentriques et nulle sur le bord de  $\sigma$ , elle est nulle. Les formes de Whitney étendues sont linéairement indépendantes sur  $\sigma$  puisque leurs restrictions au bord le sont.  $\square$

**Remarque 3.11.** *Etant donné un simplexe orienté  $\sigma$  de dimension  $r$ , notons  $\sigma'_i$  les composantes de son bord. Le a) du résultat précédent implique que si l'on considère la forme différentielle  $\int \omega(\sigma) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} [\sigma; \sigma'_i] \omega(\sigma'_i; \sigma)$ , on a l'égalité  $d(\int \omega(\sigma)) = \omega(\sigma)$ . L'application qui à  $\sigma$  associe  $\int \omega(\sigma)$  peut être vue comme la version "formes de Whitney" du bord.*

Considérons maintenant le cas d'un simplexe  $\gamma$  face de  $\sigma$  et appelons  $\phi_h$  les faces de  $\sigma$  admettant  $\gamma$  pour face de codimension 1. Plus précisément, notons  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  les coordonnées barycentriques du simplexe  $\gamma$  dans  $\sigma$  de coordonnées barycentriques  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ . Pour tout  $h = \ell + 1, \dots, p$ , notons  $\phi_h$  le simplexe de  $\sigma$  de coordonnées barycentriques  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \lambda_h)$ .

**Lemme 3.12.** *Avec les notations précédentes, il vient :*

$$\sum_{h=\ell+1}^p \omega(\phi_h; \sigma) = (-1)^{\ell+1} (\ell+1)! d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell. \quad (3.9)$$

PREUVE. On a :

$$\omega(\phi_h; \sigma) = (\ell+1)! \left( \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell \wedge d\lambda_h + (-1)^{\ell+1} \lambda_h d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{h=\ell+1}^p \omega(\phi_h; \sigma) &= (\ell+1)! \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell \wedge \left( \sum_{h=\ell+1}^p d\lambda_h \right) \\ &\quad + (-1)^{\ell+1} (\ell+1)! \left( \sum_{h=\ell+1}^p \lambda_h \right) d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell \end{aligned}$$

où  $\sum_{h=\ell+1}^p \lambda_h = 1 - \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h$ , donc  $\sum_{h=\ell+1}^p d\lambda_h = - \sum_{h=0}^{\ell} d\lambda_h$ . Il vient

$$\sum_{h=\ell+1}^p \omega(\phi_h; \sigma) = (\ell+1)! \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1} \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell + (-1)^{\ell+1} (\ell+1)! \left( \sum_{h=\ell+1}^p \lambda_h \right) d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_\ell$$

et le résultat.  $\square$

Le lemme suivant est crucial pour la suite. Il énonce une égalité de formes différentielles au sens des distributions ou des courants. Comme nous le verrons, la preuve du théorème repose sur des constructions explicites de représentants sous-analytiques des solutions d'équations impliquant des distributions.



**Lemme 3.13.** *Avec les mêmes notations que le lemme précédent, étant donnée une fonction  $E$  définie, sous-analytique et bornée sur  $\sigma$ , notant toujours  $\omega(\gamma; \sigma)$  l'extension à  $\sigma$  de la forme de Whitney de  $\gamma$ , on l'égalité au sens des distributions :*

$$d(E \omega(\gamma; \sigma)) = (-1)^{\ell+1} \sum_{h=\ell+1}^p \left( E_h + \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i \frac{\partial E_h}{\partial \lambda_i} \right) \omega(\phi_h; \sigma), \quad (3.10)$$

où  $E_h$  est la fonction de  $p$  variables définie sur  $\sigma$  par

$$E_h(\lambda_0, \dots, \widehat{\lambda_h}, \dots, \lambda_p) = E(\lambda_0, \dots, 1 - \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i, \dots, \lambda_p).$$

PREUVE. On a

$$d(E \omega(\gamma; \sigma)) = dE \wedge \omega(\gamma; \sigma) + E d(\omega(\gamma; \sigma))$$

où le premier terme s'écrit

$$dE \wedge \omega(\gamma; \sigma) = \left( \sum_{i=0}^p \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} d\lambda_i \right) \wedge \left( \ell! \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \right).$$

Séparons cette formule en deux sommes relativement à l'indice  $i$ , la première en sommant de  $i = 0$  à  $\ell$  et la seconde de  $\ell + 1$  à  $p$ .

Dans la première somme et pour  $i$  fixé, ou bien  $i \neq j$ , alors  $d\lambda_i$  apparaît dans le produit  $d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell}$  et dans ce cas, sa contribution est nulle, ou bien  $i = j$  et alors  $d\lambda_i = d\lambda_j$  complète le produit avec  $j$  permutations pour retrouver la  $j$ -ème place. La première somme est donc égale à :

$$\ell! \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell}. \quad (3.11)$$

La deuxième somme, pour  $i = \ell + 1$  à  $p$ , est égale à

$$\ell! (-1)^{\ell} \sum_{i=\ell+1}^p \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \wedge d\lambda_i.$$

Comme on a

$$\omega(\phi_i; \sigma) = (\ell+1)! \left( \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \wedge d\lambda_i + (-1)^{\ell+1} \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \right)$$

autrement dit

$$\left( \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \wedge d\lambda_i \right) = \frac{1}{(\ell+1)!} \omega(\phi_i; \sigma) - (-1)^{\ell+1} \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell},$$

la deuxième somme est donc égale à

$$\ell! (-1)^{\ell} \sum_{i=\ell+1}^p \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) \left( \frac{1}{(\ell+1)!} \omega(\phi_i; \sigma) - (-1)^{\ell+1} \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_{\ell} \right)$$

que nous décomposons comme suit :

$$(-1)^\ell \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=\ell+1}^p \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) \omega(\phi_i; \sigma) \quad (3.12)$$

$$+ \ell! \sum_{i=\ell+1}^p \left( \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) \lambda_i d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge d\lambda_\ell. \quad (3.13)$$

En utilisant le lemme 3.12, la somme de (3.11) et (3.13) est égale à

$$\ell! \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge d\lambda_\ell = (-1)^{\ell+1} \frac{1}{\ell+1} \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} \right) \left( \sum_{h=\ell+1}^p \omega(\phi_h; \sigma) \right). \quad (3.14)$$

Enfin, par sommation de (3.12) et (3.14), on obtient

$$dE \wedge \omega(\gamma; \sigma) = (-1)^{\ell+1} \frac{1}{\ell+1} \sum_{h=\ell+1}^p \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} \right) \omega(\phi_h; \sigma).$$

Maintenant

$$\begin{aligned} E d\omega(\gamma; \sigma) &= E \ell! d \left( \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \lambda_j d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \cdots \wedge d\lambda_\ell \right) = E \ell! (\ell+1) d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge d\lambda_\ell \\ &= E (\ell+1)! d\lambda_0 \wedge \cdots \wedge d\lambda_\ell = (-1)^{\ell+1} E \sum_{h=\ell+1}^p \omega(\phi_h; \sigma) \end{aligned}$$

en utilisant (3.9). On obtient donc finalement

$$d(E \omega(\gamma; \sigma)) = (-1)^{\ell+1} \sum_{h=\ell+1}^p \left( E + \frac{1}{\ell+1} \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} \right) \right) \omega(\phi_h; \sigma).$$

On peut encore écrire différemment cette formule, en remarquant que, sur  $\sigma$ , les variables  $\lambda_i$  sont dépendantes : on a

$$\lambda_h = 1 - \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i.$$

Notant

$$E_h(\lambda_0, \dots, \widehat{\lambda_h}, \dots, \lambda_p) = E(\lambda_0, \dots, 1 - \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i, \dots, \lambda_p),$$

on a, pour  $i \neq h$ ,

$$\frac{\partial E_h}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial E}{\partial \lambda_h}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} E + \frac{1}{\ell+1} \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i \frac{\partial E}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} \right) \\ = E_h + \frac{1}{\ell+1} \left( \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i \left( \frac{\partial E_h}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} \right) + \lambda_h \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} - \frac{\partial E}{\partial \lambda_h} \right) = E_h + \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=0, i \neq h}^p \lambda_i \frac{\partial E_h}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

et le résultat.  $\square$

Remarquons que la donnée d'une orientation sur  $\sigma$  équivaut à la donnée d'une orientation sur  $\sigma'$ , d'une orientation sur la face opposée  $\sigma''$  et d'un ordre sur le couple  $(\sigma', \sigma'')$ . La fonction  $u_{\sigma'} = \sum_{k=0}^q \lambda_{i_k}$  est définie sur tout le simplexe  $\sigma$  et est égale à 1 sur  $\sigma'$ . On a :

$$\frac{du_{\sigma'}}{u_{\sigma'}(1 - u_{\sigma'})} = \frac{du_{\sigma'}}{u_{\sigma'}} - \frac{du_{\sigma''}}{u_{\sigma''}} = -\frac{du_{\sigma''}}{u_{\sigma''}(1 - u_{\sigma''})}$$

où la fonction  $u_{\sigma''} = 1 - u_{\sigma'}$  est définie sur tout le simplexe  $\sigma$  et est égale à 1 sur  $\sigma''$ .

**Proposition 3.14.** *Soient  $\sigma'$  une face de dimension  $q$  du simplexe orienté  $\sigma$  de dimension  $p$  et  $\sigma''$  la face opposée, on a l'égalité :*

$$\omega(\sigma) = \frac{(-1)^p}{p - q} \binom{p}{q} \omega(\sigma'; \sigma) \wedge \omega(\sigma''; \sigma) \wedge \left( \frac{du_{\sigma'}}{u_{\sigma'}(1 - u_{\sigma'})} \right).$$

Remarquons que cette formule traduit le fait que, à un coefficient près, le volume du simplexe est égal au volume de deux faces opposées par le volume normalisé d'un segment qui les joint.

PREUVE. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité que les simplexes orientés  $\sigma'$  et  $\sigma''$  ont pour sommets respectifs les points  $a_0, a_1, \dots, a_q$  et  $a_{q+1}, \dots, a_p$  pris dans cet ordre. Ecrivons, en fonction des coordonnées barycentriques correspondantes l'expression

$$\omega(\sigma'; \sigma) \wedge \omega(\sigma''; \sigma) \wedge \left( \frac{d(\lambda_0 + \dots + \lambda_q)}{\lambda_0 + \dots + \lambda_q} - \frac{d(\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_p)}{\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_p} \right)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & q! \sum_{i=0}^q (-1)^i \lambda_i \quad d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_q \\ & \wedge \quad (p - q - 1)! \sum_{j=q+1}^p (-1)^j \lambda_j d\lambda_{q+1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_p \\ & \wedge \left( \frac{d\lambda_0 + \dots + d\lambda_q}{\lambda_0 + \dots + \lambda_q} - \frac{d\lambda_{q+1} + \dots + d\lambda_p}{\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_p} \right) = \\ & q!(p - q - 1)! \sum_{i=0}^q \sum_{j=q+1}^p (-1)^{i+j} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_0 + \dots + \lambda_q} \\ & \quad (d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_q) \wedge (d\lambda_{q+1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_p) \wedge (d\lambda_0 + \dots + d\lambda_q) \\ & + q!(p - q - 1)! \sum_{i=0}^q \sum_{j=q+1}^p (-1)^{i+j+1} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_{q+1} + \dots + \lambda_p} \\ & \quad (d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_q) \wedge (d\lambda_{q+1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_p) \wedge (d\lambda_{q+1} + \dots + d\lambda_p). \end{aligned}$$

Etudions les deux termes obtenus : dans le premier terme, et pour  $i$  fixé, le produit extérieur de  $(d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_q)$  et  $(d\lambda_0 + \dots + d\lambda_q)$  est nul sauf à produire un élément  $(d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_i \wedge \dots \wedge d\lambda_q)$ . Le nombre de permutations pour ramener le terme

$d\lambda_i$  de la dernière à la  $i$ -ème place est égal à  $(q - i + 1) + (p - q - 1) = p - i$ . On en déduit que ce premier terme est égal à :

$$q!(p-q-1)! \sum_{i=0}^q \sum_{j=q+1}^p (-1)^{p+j} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_0 + \dots + \lambda_q} d\lambda_0 \wedge \dots \wedge d\lambda_i \wedge \dots \wedge d\lambda_q \wedge d\lambda_{q+1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_p,$$

c'est-à-dire

$$q!(p-q-1)! \sum_{j=q+1}^p (-1)^{p+j} \lambda_j d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_j} \wedge \dots \wedge d\lambda_p.$$

De la même façon, et cette fois en fixant  $j$ , on vérifie que le second terme est égal à :

$$q!(p-q-1)! \sum_{i=0}^q (-1)^{p+i} \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_p.$$

Notre expression est donc finalement égale à

$$q!(p-q-1)!(-1)^p \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i d\lambda_0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda_i} \wedge \dots \wedge d\lambda_p = \frac{q!(p-q-1)!}{p!} (-1)^p \omega(\sigma).$$

□

**Corollaire 3.15.** *Dans le cas particulier où  $\sigma'$  est une face de codimension 1 et  $\sigma''$  est le point  $a_p$  la formule s'écrit*

$$\omega(\sigma) = (-1)^{p+1} p \omega(\sigma'; \sigma) \wedge \frac{d\lambda_p}{1 - \lambda_p}$$

**Corollaire 3.16.** *Plus généralement, on peut exprimer, pour tout prisme  $\pi = \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$ , la forme  $\omega(\pi)$  en fonction de la forme de Whitney d'un prisme  $\pi' = \sigma'_0 \times \dots \times \sigma'_s$  du bord de  $\pi$  :*

$$\omega(\pi) = (-1)^a \omega(\pi'; \pi) \wedge \omega(\pi''; \pi) \bigwedge_{j=0}^s \left( \frac{du_{\sigma'_j}}{u_{\sigma'_j}(1 - u_{\sigma'_j})} \right)$$

où  $\pi'' = \sigma''_0 \times \sigma''_1 \times \dots \times \sigma''_s$  est le prisme produit des faces opposées aux  $\sigma'_i$  dans les  $\sigma_i$  et orientés par l'ordre des leurs sommets,  $u_{\sigma'_i}$  est la fonction somme des coordonnées

barycentriques relatives à  $\sigma'_i$  et  $a = \sum_{i=1}^s |\sigma'_i| \left( \prod_{j=0}^{i-1} |\sigma''_j| + 1 \right)$ .

PREUVE. La preuve consiste à appliquer la proposition 3.14 pour chacun des simplexes  $\sigma_i$  du prisme  $\pi$ . □

## 4 Formes différentielles sur les faisceaux prismaux

### 4.1 Définitions

**Définition 4.1.** Soient  $P$  un ensemble prismaal et  $\mathcal{F}$  un faisceau prismaal sur  $P$ . Comme en 2.2, notons  $e_\rho: \mathcal{F}(\rho) \rightarrow \rho$  la projection associée à chaque prisme  $\rho$  de  $P$ . On appelle

$r$ -forme différentielle  $\mu$ -régulière (resp. sous-analytique) sur  $\mathcal{F}(\rho)$  la donnée d'une  $r$ -forme différentielle  $\mu$ -régulière (resp. sous-analytique)  $\omega_\pi$  sur chaque prisme  $\pi$  de  $\mathcal{F}(\rho)$  de telle façon que les restrictions de ces formes différentielles aux faces communes à deux prismes de  $\mathcal{F}(\rho)$  coïncident.

On appelle  $r$ -forme différentielle  $\mu$ -régulière sur le faisceau prismal  $\mathcal{F}$  la donnée d'une forme différentielle  $\mu$ -régulière sur chacun des  $\mathcal{F}(\rho)$  de façon à ce que, pour chaque face  $\rho'$  de  $\rho$ , la forme  $\omega_\rho$  restreinte à l'image réciproque de  $\rho'$  par  $e_\rho$  coïncide avec  $\omega_{\rho'}$ . Rappelons que d'après la définition 2.2, si  $\rho'$  est une face de  $\rho$ , alors  $e_\rho^{-1}(\rho')$  est une réunion de prismes de  $\mathcal{F}(\rho)$ . Nous noterons  $\Omega_\mu^r(\mathcal{F})$  l'espace vectoriel des  $r$ -formes différentielles  $\mu$ -régulières sur le faisceau prismal  $\mathcal{F}$ .

En particulier, lorsque  $\mathcal{F}$  est le faisceau  $\mathcal{T}$  tel que  $\mathcal{T}(\rho) = \rho$  pour tout  $\rho$ , l'espace vectoriel  $\Omega_\mu^0(\mathcal{T})$  muni de la multiplication des fonctions est appelé *algèbre des fonctions  $\mu$ -régulières sur  $P$*  et noté  $\mathcal{O}_{P,\mu}$ . Pour chaque entier  $r$ , l'espace vectoriel  $\Omega_\mu^r(\mathcal{T})$  est en fait un  $\mathcal{O}_{P,\mu}$ -module.

Dorénavant, nous ne considérerons plus que des formes sous-analytiques, c'est-à-dire satisfaisant dans un voisinage ouvert de chaque prisme  $\rho$  de  $P$  dans son affine ambiant les conditions de la Proposition 3.4 et supprimerons donc l'indice  $\mu$ . Pour chaque prisme  $\rho \subset P$ , les espaces vectoriels  $\Omega^r(\mathcal{F}(\rho))$ , munis des morphismes induits par la différentielle au sens des distributions, forment un complexe noté  $\Omega^\bullet(\mathcal{F}(\rho))$ . Puisque la différentielle ne commute pas aux morphismes de spécialisation, on ne peut pas mettre une structure de complexe différentiel sur la famille des espaces vectoriels  $\Omega^r(\mathcal{F})$ .

Notons  $e_{\mathcal{F}}^* : \Omega^\bullet(\mathcal{T}) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{F})$  le morphisme associé à  $e$  qui pour tout prisme  $\rho$  coïncide avec le morphisme naturel  $e_{\mathcal{F},\rho}^* : \Omega^\bullet(\mathcal{T}(\rho)) \rightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{F}(\rho))$ . Remarquons que, étant donné un morphisme  $\chi : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$  de faisceaux prismaux sur  $P$ , on a

$$e_{\mathcal{F}'}^* = \chi^* \circ e_{\mathcal{F}}^*. \quad (4.1)$$

Définissons la forme différentielle de degré  $|\rho|$

$$de_\rho = de_{\mathcal{F},\rho} = e_{\mathcal{F},\rho}^* \omega(\rho).$$

Puisque la forme  $de_\rho$  est fermée, les noyaux  $K_\rho^\bullet = \text{Ker}(\wedge de_\rho)$  forment un sous-complexe de  $\Omega^\bullet(\mathcal{F}(\rho))$ .

D'après le corollaire 3.16, pour toute face  $\rho'$  de  $\rho$ , la restriction de  $de_\rho|_{e_\rho^{-1}(\rho')}$  est de la forme  $de_{\rho'} \wedge \theta$ . Par conséquent, l'image de  $K_\rho^r$  par l'homomorphisme de spécialisation  $\Omega^r(\mathcal{F}(\rho)) \rightarrow \Omega^r(\mathcal{F}(\rho'))$  est contenue dans  $K_{\rho'}^r$ . D'où nous obtenons par passage aux quotients  $\Omega_{rel}^r(\mathcal{F}(\rho)) = \Omega^r(\mathcal{F}(\rho))/K_\rho^r$ , un morphisme

$$\Omega_{rel}^r(\mathcal{F}(\rho)) \longrightarrow \Omega_{rel}^r(\mathcal{F}(\rho')).$$

Nous appellerons  $r$ -forme différentielle relative la donnée pour chaque simplexe  $\rho$  d'un élément de l'espace vectoriel quotient  $\Omega_{rel}^r(\mathcal{F}(\rho))$ , de manière compatible avec les homomorphismes de spécialisation précédents.

**Lemme 4.2.** *Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux  $r$ -formes différentielles sur un faisceau prismal  $\mathcal{F}$ . Pour tout prisme  $\rho$  et pour  $t \in \dot{\rho}$  notons  $i_t$  l'inclusion de la fibre  $e_\rho^{-1}(t)$  dans  $\mathcal{F}(\rho)$ , alors  $de_\rho \wedge \omega = 0$  si et seulement si, pour tout  $t \in \dot{\rho}$ , on a :*

$$i_t^* \omega = 0.$$

PREUVE. Cela résulte de l'écriture des formes différentielles dans les coordonnées barycentriques du prisme. D'une part, les composées avec  $e_\rho$  des coordonnées barycentriques de  $\rho$  font partie d'un système de coordonnées barycentriques du prisme  $\pi$ , et d'autre part, pour tout facteur  $\tau$  de  $\rho$ , la forme de Whitney  $\omega(\tau)$  s'écrit  $(-1)^s s! dt_0 \wedge \cdots \wedge dt_{s-1}$  (voir (3.8)).  $\square$

**Remarque 4.3.** Toute rétraction  $\chi$  de  $\mathring{\rho}$  sur un point  $t$  de  $\mathring{\rho}$  induit une rétraction de  $\mathcal{F}(\mathring{\rho})$  sur la fibre  $e_\rho^{-1}(t)$  et donc une rétraction linéaire  $\Lambda^r(d\chi) : \Lambda^r(T^*(e_\rho^{-1}(t))) \rightarrow \Lambda^r(T^*\mathcal{F}(\mathring{\rho}))$ . Avec ces notations, on a

$$(\omega|_{e_\rho^{-1}(t)} - \chi(i_t^* \omega)) \wedge de = 0.$$

Choisissons une rétraction  $\chi$  dans chaque simplexe, nous nous permettrons lorsqu'il s'agira de formes relatives, d'identifier la restriction à une fibre et l'image inverse sur une fibre.

On appellera différentielle relative et on notera  $d_e$  la différentielle induite par la différentielle  $d$  dans les quotients  $\Omega_{rel}^r(\mathcal{F}(\rho))$ .

**Définition 4.4.** Appelons forme différentielle *verticale* sur un prisme  $\pi$  au dessus de  $\tau$  une forme différentielle qui est l'image réciproque par la projection  $\tau \times \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s \rightarrow \sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  d'une forme différentielle sur  $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$ . Toute forme différentielle verticale définit naturellement une forme différentielle relative.

## 4.2 Etude des formes de Whitney relatives dans $\mathcal{P}_f$

Soit  $\mathcal{P}_f$  le faisceau prismal associé à un morphisme simplicial orienté  $f : \Delta \rightarrow T$  comme dans le théorème 2.11, et  $\pi = \pi(\sigma)$  un prisme de  $\mathcal{P}_f$  d'images  $\sigma \subset \Delta$  et  $\tau \subset T$ . Notons  $y_0, \dots, y_s$  les sommets de  $\tau$  et  $\sigma_j = \sigma \cap e^{-1}(y_j)$ . Le but de cette section est la construction de formes de Whitney relatives engendrant la cohomologie des fibres en tout degré. Le cas des formes de degré égal à la dimension relative des simplexes est facile puisque la chute de dimension au bord de  $\tau$  implique la nullité de la restriction de la forme ; c'est l'objet de cette section :

**Lemme 4.5.** *La donnée pour chaque  $\pi = \pi(\sigma) \in \mathcal{P}_f$  de la forme différentielle verticale*

$$\omega(\pi(\sigma)/\tau) = \omega(\sigma_0) \wedge \omega(\sigma_1) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s) \quad (4.2)$$

*définit une forme différentielle relative de degré  $r = \dim_{\text{rel}} \sigma$  sur  $\mathcal{P}_f$  au dessus de  $T$ .*

PREUVE. Etant données des orientations de  $\Delta$  et de  $T$  telles que le morphisme  $f$  soit orienté, les formes différentielles  $\omega(\sigma)$  associées aux simplexes  $\sigma$  ayant même image  $\tau$  et même dimension relative se recollent en une forme différentielle sur  $f^{-1}(\tau)$ . L'orientation de  $f$  induit une orientation de la fibre type  $\sigma_0 \times \cdots \times \sigma_s$  de chaque simplexe et ces orientations sont compatibles entre elles. Au moyen de l'isomorphisme  $\theta^\sigma$ , on en déduit que les  $\omega(\pi(\sigma))$  se recollent au dessus de  $\tau$ , et donc que les formes différentielles  $\omega(\pi/\tau)$  se recollent dans la fibre.  $\square$

**Lemme 4.6.** *a) La donnée sur chaque simplexe  $\sigma$  de  $\Delta$  de la forme différentielle*

$$t_0^{|\sigma_0|} \cdots t_s^{|\sigma_s|} \omega(\sigma_0) \wedge \omega(\sigma_1) \wedge \cdots \wedge \omega(\sigma_s) = t_0^{|\sigma_0|} \cdots t_s^{|\sigma_s|} \omega(\pi(\sigma)/\tau) \quad (4.3)$$

*détermine une forme différentielle relative sur  $\mathcal{P}_f$ .*

b) La donnée sur chaque simplexe  $\sigma$  de  $\Delta$  d'une fonction sous-analytique  $A_\sigma$  prenant les mêmes valeurs sur les faces communes à deux simplexes détermine une forme différentielle relative sur  $\mathcal{P}_f$  dont la valeur sur  $\pi(\sigma)$  est

$$(A_\sigma \circ \psi^\sigma) t_0^{|\sigma_0|} \dots t_s^{|\sigma_s|} \omega(\pi(\sigma)/\tau).$$

c) D'après la Proposition 3.8 et avec ses notations, on a

$$(\psi^\sigma)^*(\omega(\sigma)) = (-1)^{\alpha(\sigma,\nu)} \frac{p!}{|\sigma_0|! \dots |\sigma_s|! s!} t_0^{|\sigma_0|} \dots t_s^{|\sigma_s|} \omega(\tau) \wedge \omega(\pi(\sigma)/\tau). \quad (4.4)$$

PREUVE. Prouvons a). Le lemme 4.5 montre que, au dessus de chaque simplexe  $\tau$  la forme (4.3) détermine une forme différentielle relative au dessus de  $\tau$ . Soit maintenant  $\tau'$  une face de  $\tau$  au dessus de laquelle la dimension relative de  $\sigma$  ne varie pas, cela signifie que pour tout sommet  $y_i$  de  $\tau$  qui n'est pas dans  $\tau'$ , on a  $|\sigma_i| = 0$  (exemple du 2-simplexe situé à mi-hauteur dans la Figure 4). Posons  $\pi' = \pi|_{\tau'}$ , alors  $\omega(\pi/\tau)|_{\pi'} = \omega(\pi'/\tau')$ . Dans les autres cas, l'un au moins des  $\sigma_i$  n'est pas nul et donc notre forme différentielle s'annule au dessus de  $\tau'$ .

Le b) résulte aussitôt du a) et le c) de la proposition 3.8.  $\square$

**Lemme 4.7.** Posons  $\pi = \pi(\sigma)$ , on a pour tout  $t \in \tau$  l'égalité

$$\int_{\pi(t)} \omega(\pi/\tau) = 1.$$

PREUVE. En effet  $\omega(\pi/\tau)$  est la forme volume produit des formes volumes des simplexes verticaux du prisme  $\pi$ . Cela résulte aussi du 2) de la Remarque 2.12.  $\square$

**Définition 4.8.** Extension verticale d'une forme différentielle relative. Soit  $\pi'$  une face de codimension 1 d'un prisme  $\pi$ , notons  $\tau'$  l'image de  $\pi'$ . De même que dans le cas absolu, on définit l'extension à  $\pi$  d'une forme différentielle relative sur  $\pi'$  comme la forme différentielle  $\omega(\pi'/\tau'; \pi)$  donnée par la même écriture en coordonnées barycentriques. C'est une forme différentielle relative au morphisme de  $\pi$  sur son image  $\tau$  dont  $\tau'$  est une face.

Remarquons qu'une face de codimension relative 1 d'un prisme  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  de  $\mathcal{P}_f$  est nécessairement obtenue de la façon suivante : on remplace un des simplexes  $\sigma_j$  par une de ses faces de codimension 1 et on fait le produit avec les autres. A chaque face de codimension relative 1 est donc associé un sommet bien déterminé de  $\tau$ .

**Lemme 4.9.** Soit  $\pi'$  un prisme de  $\mathcal{P}_f$  d'image  $\tau'$  et soit  $\pi$  un prisme dont  $\pi'$  est une face de codimension 1. On a, avec les notations du lemme 3.10 :

$$d_e \omega(\pi'/\tau'; \pi) = \begin{cases} [\pi; \pi'] \omega(\pi/\tau') & \text{si } \pi \text{ a pour image } \tau', \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PREUVE. Dans le cas où  $\pi$  a pour image  $\tau'$ , il s'écrit  $\pi = \tau' \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_j \times \dots \times \sigma_s$  et le prisme  $\pi'$  s'écrit  $\pi' = \tau' \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma'_j \times \dots \times \sigma_s$ . Alors on a

$$\omega(\pi'/\tau'; \pi) = \omega(\sigma_0) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma'_j; \sigma_j) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma_s)$$

d'où le résultat, d'après le lemme 3.10. Sinon, les prismes  $\pi'$  et  $\pi$  s'écrivent sous la forme  $\pi' = \tau' \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  et  $\pi = \tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  où  $\tau'$  est une face de codimension 1 de  $\tau$ . Dans ce cas,  $\omega(\pi'/\tau'; \pi) = \omega(\pi/\tau)$  et sa différentielle relative est nulle, puisque pour chaque  $\sigma_i$ , on a  $d\omega(\sigma_i) = 0$  dans  $\sigma_i$ .  $\square$

### 4.3 Triangulations et formes sous-analytiques

Soit  $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  un sous-ensemble sous-analytique non singulier tel que la restriction à  $X$  de la première projection soit propre et triangulable. Soit  $\Delta \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  le complexe simplicial linéaire image réciproque de  $X$  par un homéomorphisme sous-analytique

$$\begin{array}{ccc} X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m & \xleftarrow{t} & \Delta \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \\ & \searrow & \swarrow f \\ & \mathbf{R}^n & \end{array}$$

de triangulation et notons  $f$  la restriction à  $\Delta$  de la première projection. Reprenons les notations du théorème 2.11 et en particulier notons  $\psi: \mathcal{P}_f \rightarrow \mathcal{S}_f$  le morphisme prismal de *loc. cit.*

**Lemme 4.10.** *Soit  $\omega$  une  $r$ -forme différentielle analytique (ou de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ ) sur  $X$ . L'image réciproque  $t^*\omega$  est une forme sous-analytique sur  $\Delta$  et l'on a  $d(t^*\omega) = t^*d\omega$ .*

PREUVE. L'égalité  $d(t^*\omega) = t^*d\omega$  est vérifiée à l'intérieur de chaque simplexe de  $\Delta$  puisque l'homéomorphisme  $t$  y est analytique. Remarquons que les coefficients de  $t^*\omega$  et  $t^*d\omega$  sont sous-analytiques.

Montrons que la forme  $t^*\omega$  est régulière sur  $\Delta$  au sens de Whitney [Whi, Chapitre III, p.104]. Cela signifie qu'elle est continue et qu'il existe une  $(r+1)$ -forme  $\omega'$  continue sur  $\Delta$  telle que, pour tout  $(r+1)$ -simplexe singulier  $\zeta: \Sigma^{r+1} \rightarrow \Delta$  où  $\Sigma^{r+1}$  désigne le simplexe type de dimension  $r+1$ , on ait :

$$\int_{\zeta} \omega' = \int_{\partial\zeta} \omega.$$

D'après *loc cit.* il suffit de le montrer pour des simplexes singuliers qui sont des immersions analytiques à l'intérieur de chaque face, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle. Pour un tel  $\zeta$ , le simplexe  $t \circ \zeta$  est un simplexe de  $X$  possédant les mêmes propriétés. On a alors, en notant encore  $\zeta$  l'image de l'application  $\zeta$ , les égalités suivantes :

$$\int_{\zeta} t^*d\omega = \int_{t(\zeta)} d\omega = \int_{\partial t(\zeta)} \omega = \int_{\partial(\zeta)} t^*\omega$$

ce qui montre que la forme  $t^*d\omega$  est la forme  $\omega'$  cherchée. D'après la généralisation à notre situation du lemme 16a de Whitney [Whi, Ch.III], une telle forme, si elle existe, est unique, ce qui entraîne qu'elle est la dérivée au sens des distributions de  $t^*\omega$  et le résultat.  $\square$

Il résulte de la démonstration de Whitney du théorème de de Rham [Whi, Chapitre IV, §29] que les formes de Whitney engendrent la cohomologie des formes 0-régulières. Nous verrons plus bas dans le Lemme 4.12 la version sous-analytique de ce résultat.

**Lemme 4.11.** *1) Soit  $h$  une fonction sous-analytique continue sur un domaine sous-analytique compact  $K$  de  $\mathbf{R}^k$  contenant l'origine et tout chemin joignant l'origine à l'un de ses points. Supposons que  $h$  est analytique dans l'intérieur de  $K$ . Pour toute bijection sous-analytique continue  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  vérifiant  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(1) = 1$ , notant  $\phi(s)u$  pour  $\phi(s)u_1, \dots, \phi(s)u_k$ , la fonction*

$$u \mapsto \int_0^1 h(\phi(s)u) ds$$



est sous-analytique et continue sur  $K$ .

2) Si de plus la fonction  $h$  est arc-analytique, (voir [B-M1]), il en est de même de la fonction  $u \mapsto \int_0^1 h(\phi(s)u)ds$

PREUVE. La continuité de la fonction résulte du fait que  $h$  est continue. Nous allons utiliser le théorème de rectilinéarisation des fonctions sous-analytiques (voir [B-M2] Cor. 4.9, Parusiński [Pa]). Appliquons le Théorème 3.4 de [K-P], qui reprend le Théorème 4.1 de [Pa], à la fonction  $h: K \rightarrow \mathbf{R}$ . Nous obtenons une collection finie de morphismes  $\pi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^k$  telle que :

- Chaque  $W_\alpha$  est analytiquement isomorphe à  $\mathbf{R}^k$  et contient un compact sous-analytique  $K_\alpha$  de telle manière que  $\bigcup_\alpha \pi_\alpha(K_\alpha) = K$ ,
- La fonction  $h \circ \pi_\alpha$  est analytique dans  $W_\alpha$ , et dans des coordonnées  $y_1, \dots, y_k$  sur  $\mathbf{R}^k$  les fonctions  $u_i \circ \pi_\alpha$  s'écrivent

$$u_i \circ \pi_\alpha = B_\alpha y_1^{e_1^{(i)}} \dots y_k^{e_k^{(i)}} \quad 1 \leq i \leq k,$$

où les  $e_j^{(i)}$  sont des entiers non négatifs et  $B_\alpha$  est une fonction analytique ne s'annulant pas dans  $K_\alpha$ . Nous pouvons par un changement des coordonnées faire disparaître les  $B_\alpha$  en absorbant chacune d'elles dans l'une des variables  $y_j$ .

Le morphisme  $\pi_\alpha$  étant génériquement fini, le déterminant de la matrice  $(e_j^{(i)})$  est un entier non nul, disons  $d \in \mathbf{Z}$ . Il en résulte que nous pouvons trouver des puissances  $\psi_j(s) = \phi(s)^{R_j}$  de  $\phi(s)$ , avec des exposants  $R_j \in \frac{1}{d}\mathbf{Z}$  uniquement déterminés, telles que l'on ait

$$(\phi(s)u_i) \circ \pi_\alpha = (\psi_1(s)y_1)^{e_1^{(i)}} \dots (\psi_k(s)y_k)^{e_k^{(i)}} \quad 1 \leq i \leq k.$$

Choisissons maintenant un point  $z$  appartenant à  $K_\alpha$ , de coordonnées  $y_1, \dots, y_k$  et tel que  $\pi_\alpha(z) = u \in K$ . Nous allons calculer la composée  $(\int_0^1 h(\phi(s)u)ds) \circ \pi_\alpha$  au voisinage de  $z$ . Nous pouvons supposer que pour  $s \in [1 - a_1, 1]$  le chemin  $(\psi_1(s)y_1)^{e_1^{(i)}}, \dots, (\psi_k(s)y_k)^{e_k^{(i)}}$  reste dans  $K_\alpha$ . Comme certains des  $\psi_j(s)$  vont devenir très grands lorsque  $s$  devient petit, le chemin va en général sortir de  $K_\alpha$  avant d'atteindre  $s = 0$ , mais se prolongera analytiquement dans un autre compact  $K_\beta$  pour des valeurs  $s \in [1 - a_2, 1 - a_1]$ , et puisque notre chemin et les  $K_\alpha$  sont sous-analytiques, ceci se reproduira un nombre fini de fois. Ainsi notre intégrale, au voisinage du point  $z$ , est la somme d'un nombre fini d'intégrales de fonctions analytiques, les  $h \circ \pi_\alpha$ , le long de chemins analytiques dépendant analytiquement du point  $z$ ; c'est donc une fonction analytique sur chacun des  $W_\alpha$ . Ceci prouve 1).

Il reste à démontrer le point 2). Pour cela, étant donné un arc analytique  $u_i = u_i(t)$  nous devons vérifier que  $E = \int_0^1 h(\phi(s)u(t))ds$  est analytique en  $t$  si la fonction  $h(u(t))$  l'est. Par dérivation itérée sous l'intégrale on calcule le développement de Taylor, et l'on constate que ses termes sont le produit des termes correspondants du développement de Taylor de  $\int_0^1 h(u(t))ds$  par des puissances de  $\phi(s)$ , qui sont  $\leq 1$ . Or  $\int_0^1 h(u(t))ds$  est analytique en  $t$  parce que  $h(u(t))$  l'est, d'où le résultat. □

**Lemme 4.12.** *Sur un complexe simplicial, ou plus généralement primal, qui est une variété, les formes de Whitney engendrent la cohomologie des formes sous-analytiques.*

PREUVE. Faisons d'abord la démonstration dans le cas d'une décomposition simpliciale. Il suffit de vérifier que le lemme d'intégration des formes exactes dans un domaine étoilé

de centre  $p_0$  et les lemmes de prolongement de Whitney [Whi, Chapitre IV, §§25–26] sont valables dans le cas sous-analytique. Prouvons par exemple que le lemme 25a, p. 136 est valable dans le cas sous-analytique. Avec des notations analogues à celles de *loc. cit.*, après avoir pris pour origine le centre  $p_0$ , il s'agit de vérifier que la forme

$$\omega_1(p) = \int_{\mathbf{I} \times p} g^* \omega(sp) ds$$

est sous-analytique, où  $g: \mathbf{I} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est l'application affine définie par  $g(s, p) = sp$ . Cela résulte du Lemme 4.11 en prenant  $\phi(s) = s$ . Les lemmes de prolongement se vérifient de manière analogue.

Dans le cas d'une décomposition prismale d'une variété, chaque prisme  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_s$  admet des décompositions simpliciales "standard" dont chaque sommet est un  $s$ -uple  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_s})$  de sommets ne faisant intervenir que des sommets des  $\sigma_i$ . Sur un prisme la forme  $\omega(\sigma_1) \wedge \dots \wedge \omega(\sigma_s)$  est la forme volume du prisme. Sa restriction à chaque simplexe d'une décomposition "standard" du prisme est la forme volume du simplexe. On est alors ramené au cas des décompositions simpliciales. □

A une forme sous-analytique fermée  $\omega$  sur  $X$  on associe donc une forme sous-analytique fermée  $\omega_1$ , combinaison de formes de Whitney de simplexes de  $\Delta$ , telle que  $t^* \omega = \omega_1 + d\alpha$ , où  $\alpha$  est une forme sous-analytique fermée sur  $\Delta$ .

## 5 Formes sous-analytiques et formes de Whitney relatives

Pour une application prismale associée à une application simpliciale  $f: \Delta \rightarrow T$  comme dans l'exemple 2.10, étant donné un point  $x \in \sigma$  et  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on note  $\sigma_{(x, \varepsilon)}$  l'homothétique de  $\sigma$  par l'homothétie de centre  $x$  et de rapport  $\varepsilon$  (voir Figure 7). De même, si  $\phi$  est une face de  $\sigma$ , on note  $\phi_{(x, \varepsilon)}$  l'homothétique de  $\phi$  par l'homothétie de centre  $x \in \sigma$  et de rapport  $\varepsilon$ . Enfin, dans le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$ , on note  $\pi(\sigma)_{(x, \varepsilon)}$  et  $\pi(\phi)_{(x, \varepsilon)}$  respectivement les homothétiques de  $\pi(\sigma)$  et  $\pi(\phi)$  par homothétie de centre  $x$  et de rapport  $\varepsilon$ .

Si  $\eta$  est une forme différentielle induisant une forme de degré  $r$  non nulle dans les fibres d'un morphisme simplicial ou prismal  $f: \phi \rightarrow \tau$ , on notera  $\eta^{f(x)}$ , ou simplement  $\eta^f$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, la restriction, au sens des formes différentielles, de  $\eta$  à la fibre  $f^{-1}(f(x))$ . Posons  $\phi_{(x, \varepsilon)}^f = \phi_{(x, \varepsilon)} \cap f^{-1}(f(x))$ .

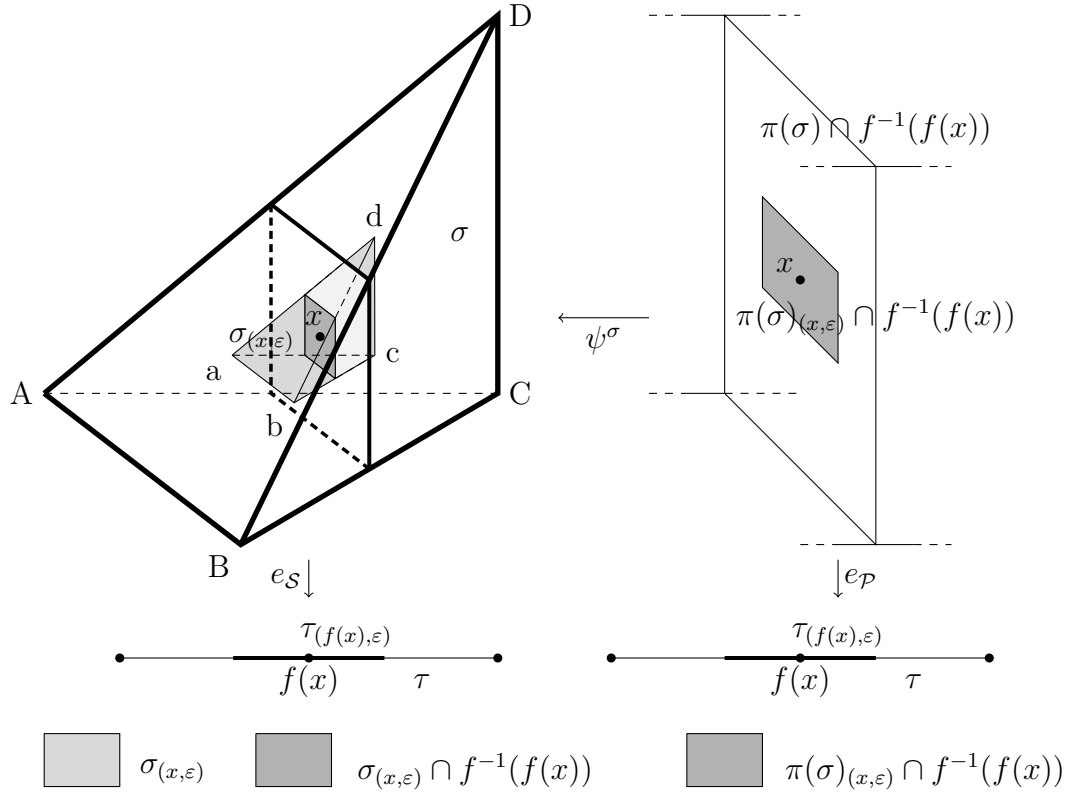
D'après le lemme 4.2, l'intégrale

$$\int_{\phi_{(x, \varepsilon)}^f} \eta^f$$

ne dépend que des coefficients de  $\eta$  dans la fibre  $f^{-1}(f(x))$ . D'autre part, le volume euclidien de  $\phi_{(x, \varepsilon)}^f$  est égal à

$$\text{vol}(\phi_{(x, \varepsilon)}^f) = t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|} \int_{\theta^\sigma(\phi_{(x, \varepsilon)}^f)} \omega(\pi(\phi)/\tau).$$

où  $\theta^\sigma$  est le morphisme défini en 2.3.



Ici,  $\sigma$  est le tétraèdre  $ABCD$  et  $\sigma_{(x,\varepsilon)}$  est le tétraèdre  $abcd$ . Pour une face  $\phi$  de  $\sigma$ , par exemple le triangle  $ACD$ , alors  $\phi_{(x,\varepsilon)}$  est le triangle  $acd$ .

Dans  $\mathcal{P}_f$ , on n'a dessiné que la fibre de  $\pi(\sigma)$  au dessus de  $f(x)$ . Le dessin de  $\pi(\sigma)$  est le produit de  $\pi(\sigma) \cap f^{-1}(f(x))$  par  $\tau$ . De même, on n'a dessiné que l'intersection de  $\pi(\sigma)_{(x,\varepsilon)}$  avec la fibre, *i.e.*  $\pi(\sigma)_{(x,\varepsilon)} \cap f^{-1}(f(x))$ . Le dessin de  $\pi(\sigma)_{(x,\varepsilon)}$  est le produit de cette intersection par  $\tau_{(f(x),\varepsilon)}$ .

FIGURE 7 – Les homothétiques  $\sigma_{(x,\varepsilon)}$  et  $\pi(\sigma)_{(x,\varepsilon)}$

**Construction 5.1.** Soit  $\pi = \tau \times \pi/\tau = \tau \times \sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  un prisme comme en section 2. Rappelons que l'on note  $t_0, \dots, t_s$  les coordonnées barycentriques de  $\tau$  et  $\mu_{j,k}$ ,  $0 \leq j \leq s$ ,  $0 \leq k \leq \dim \sigma_j$  celles de  $\sigma_0 \times \dots \times \sigma_s$  (voir (2.3)). Dans ce qui suit, nous prendrons comme coordonnées cartésiennes de chacun des  $\sigma_j$ , les coordonnées  $\mu_{j,k}$  pour  $1 \leq k \leq \dim \sigma_j$ , c'est-à-dire que l'on pose  $\mu_{j,0} = 1 - \sum_{k=1}^{\dim \sigma_j} \mu_{j,k}$ . On fait de même pour le simplexe  $\tau$ . Cela fournit un plongement de  $\pi$  dans  $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{|\tau|} \times \mathbf{R}^{|\sigma_0|} \dots \times \mathbf{R}^{|\sigma_s|}$  et un plongement de  $\pi/\tau$  dans  $\mathbf{R}^{m-|\tau|}$ .

Prenons une autre copie de  $\mathbf{R}^m$  dont on notera  $u_{j,k}$  les coordonnées correspondant aux  $\mu_{j,k}$  et  $\theta_\ell$  les coordonnées correspondant aux coordonnées  $t_\ell$  de  $\tau$  et considérons le sous-ensemble  $Z$  de  $\tau \times \pi/\tau \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  défini par les inégalités

$$-\varepsilon \mu_{j,k} \leq u_{j,k} - \mu_{j,k} \leq \varepsilon(1 - \mu_{j,k}) \quad (5.5)$$

$$\sum_k (u_{j,k} - \mu_{j,k}) \leq \varepsilon(1 - \sum_k \mu_{j,k}) \quad (5.6)$$

pour  $0 \leq j \leq s$ . Notons  $p$  la restriction à  $Z$  de la projection de  $\pi \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  sur  $\pi \times \mathbf{I}$ . la fibre de  $p$  au dessus du point de coordonnées  $(t_\ell, \mu_{j,k}, \varepsilon)$  est le prisme  $\pi_{(x,\varepsilon)}$ . L'intersection de cette fibre avec l'espace linéaire défini par  $\theta_\ell = t_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq s$  est la fibre  $\pi_{x,\varepsilon}^f$  passant par  $x$ .

Notons  $b: X \rightarrow \pi \times \mathbf{I}$  l'éclatement de l'idéal  $(\varepsilon, (\mu_{j,k})_{j,k})$  dans  $\pi \times \mathbf{I}$ . Nous allons montrer que certaines intégrales dépendant de paramètres  $v \in \pi \times \mathbf{I}$  deviennent analytiques après composition avec  $b$  et sont donc sous-analytiques sur  $\pi \times \mathbf{I}$ . Nous allons détailler le calcul dans une carte particulière de l'éclatement  $b$ ; les calculs dans les autres cartes sont analogues.

Considérons donc l'application  $b: \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \rightarrow \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I}$  définie par  $\mu_{j,k} \circ b = \varepsilon \mu'_{j,k}$  pour  $k \geq 0$  et  $\varepsilon \circ b = \varepsilon$ . C'est celle qui correspond à la carte de  $X$  où  $\varepsilon$  engendre l'idéal transformé dans  $X$ .

L'image par  $b$  du sous-ensemble de  $\tau \times \mathbf{R}_{\geq 0}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I}$  défini par les inégalités

$$0 \leq \varepsilon \mu'_{j,k} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum \varepsilon \mu'_{j,k} \leq 1$$

est  $\tau \times \pi/\tau \times \mathbf{I}$ .

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times Y_\alpha & & & & \\
\downarrow \zeta_\alpha & & & & \\
\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times S_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times W_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \pi \times \mathbf{I} \times W_\alpha \\
\downarrow \tilde{\pi}_{\alpha,B} & & \downarrow \pi_{\alpha,B} & & \downarrow \pi_\alpha \\
\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m & \xrightarrow{c} & \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m & \xrightarrow{B} & \pi \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m \\
\swarrow \tilde{Z}_b & \xrightarrow{c} & Z_b & \xrightarrow{P_b} & Z \\
\searrow & & \downarrow p_b & & \downarrow p \\
& & \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} & \xrightarrow{b} & \pi \times \mathbf{I}
\end{array}$$

Le produit fibré  $Z_b$  de  $p$  par  $b$  est le sous-espace de  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  défini par les inégalités

$$\begin{aligned}
-\varepsilon^2 \mu'_{j,k} &\leq u_{j,k} - \varepsilon \mu'_{j,k} \leq \varepsilon(1 - \varepsilon \mu'_{j,k}) \\
\sum_k (u_{j,k} - \varepsilon \mu'_{j,k}) &\leq \varepsilon(1 - \varepsilon \sum_k \mu'_{j,k}).
\end{aligned}$$

Notons  $p_b$  la projection de  $Z_b$  sur  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I}$ . La dimension des fibres de  $p_b$  chute encore pour  $\varepsilon = 0$ . Nous allons considérer l'éclatement  $c: V \rightarrow \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  de l'idéal  $(\varepsilon, (u_{j,k})_{j,k})$ . A nouveau nous allons détailler le calcul seulement dans une carte de  $V$ .

Considérons donc le morphisme  $c$  de  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  dans  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  déterminé par  $\mu_{j,k} \circ c = \mu'_{j,k}$  et  $u_{j,k} \circ c = \varepsilon u'_{j,k}$ . Alors  $Z_b$  est l'image par le morphisme  $c$  du sous-ensemble  $\tilde{Z}_b$  de  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  défini par les inégalités

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \mu'_{j,k} &\leq u'_{j,k} - \mu'_{j,k} \leq 1 - \varepsilon \mu'_{j,k} \\
\sum_k (u'_{j,k} - \mu'_{j,k}) &\leq 1 - \varepsilon \sum_k \mu'_{j,k}.
\end{aligned}$$

La fibre du morphisme  $p_b \circ c$  au dessus du point de coordonnées  $(t_j, \mu'_{j,k}, \varepsilon)$  a pour image dans  $Z$  le simplexe  $\pi_{(x,\varepsilon)}$  où  $x$  est le point de coordonnées  $(t_j, \mu_{j,k})$  avec  $\mu_{j,k} = \varepsilon \mu'_{j,k}$ .

Remarquons que toutes les fibres de  $P_b \circ c$  restreint à  $\tilde{Z}_b$  ont la même dimension.

Soient maintenant  $\omega$  une forme différentielle sous-analytique bornée sur le prisme  $\pi$  et  $\pi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathbf{R}^m$  des morphismes analytiques composés d'éclatements locaux tels que chaque forme différentielle  $\pi_\alpha^* \omega$  soit analytique sur  $W_\alpha$ . Considérons pour chaque  $\alpha$  le morphisme induit  $\pi \times \mathbf{I} \times W_\alpha \rightarrow \pi \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$ , que nous noterons encore  $\pi_\alpha$  par abus. Notons  $\pi_{\alpha,B}: \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times W_\alpha \rightarrow \tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m$  le morphisme qui s'en déduit par changement de base par le morphisme  $B$ . Nous pouvons supposer que chaque  $W_\alpha$  contient un compact sous-analytique  $K_\alpha$  tel que la réunion des images des  $K_\alpha$  recouvre

l'image du prisme  $\pi$  qui se trouve dans  $\mathbf{R}^m$ . Nous supposons de plus que les fonctions  $u_{j,k} \circ \pi_\alpha$  sont des monômes  $n_{j,k} = y_1^{a_1^{k,j}} \dots y_m^{a_m^{k,j}}$  en des coordonnées  $y_1, \dots, y_m$  sur  $W_\alpha$ , en absorbant les unités dans les coordonnées et qu'il en est de même des fonctions  $\theta_\ell \circ \pi_\alpha$ .

Le produit fibré  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times S_\alpha$  du diagramme ci-dessus a alors pour équations dans  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m \times W_\alpha$  les  $\varepsilon u'_{j,k} - n_{j,k} = 0$  pour tous les  $k, j$ .

Remarquons maintenant que les différences des exposants des monômes de ces équations binomiales, qui sont de la forme  $(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -a_1^{k,j}, \dots, -a_m^{k,j})$ , engendrent un réseau saturé. Les équations définissent donc une variété torique affine sur  $\mathbf{R}$ , qui peut être résolue par un morphisme torique, ou monomial (voir [Te2], 6.1). Cela signifie que l'on peut trouver un morphisme torique de variétés toriques non singulières  $Z_\alpha \rightarrow \tau \times \mathbf{I} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$  tel que la transformée stricte  $Y_\alpha$  de  $S_\alpha$  soit non singulière. Dans une carte locale de  $Z_\alpha$  munie de coordonnées  $z_1, \dots, z_{m+1}$  notre domaine d'intégration est défini par des inégalités de la forme :

$$\begin{aligned} -z^E \mu'_{j,k} &\leq z^{A_{j,k}} - \mu'_{j,k} \leq 1 - z^E \mu'_{j,k} \\ \sum_k (z^{A_{j,k}} - \mu'_{j,k}) &\leq 1 - z^E \sum_k \mu'_{j,k}. \end{aligned}$$

Nous intégrerons sur ce domaine, dont les inéquations dépendent linéairement des paramètres  $\mu'_{j,k}$  et analytiquement de  $\varepsilon$ , la restriction aux fibres au dessus de  $t \in \tau$  de l'image réciproque de notre forme différentielle, qui est à support dans l'espace analytique non singulier  $Y_\alpha$  et y est analytique.

**Lemme 5.2.** *Gardons les notations introduites au début de cette section. Soit  $\sigma$  un simplexe orienté de  $\Delta$  ayant pour image  $\tau$  et de dimension relative  $d$ . Soit  $\eta$  une  $r$ -forme différentielle sous-analytique sur  $\sigma$  dont la restriction aux fibres de  $\sigma \rightarrow \tau$  est de degré  $r$ , avec  $r \leq d$ . Alors, pour toute face  $\phi$  de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ , l'application  $\tilde{A}_\phi: \sigma \rightarrow \mathbf{R}$  définie par*

$$x \mapsto \tilde{A}_\phi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{\phi_{(x,\varepsilon)}^f} \eta^f}{\text{vol}(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)} \right)$$

*qui ne dépend que de la classe de  $\eta$  dans les formes relatives, est sous-analytique bornée sur  $\sigma$ .*

PREUVE. On a l'égalité :

$$\frac{\int_{\phi_{(x,\varepsilon)}^f} \eta^f}{\text{vol}(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)} = \frac{\int_{\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f} \psi^* \eta^f}{t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|} \text{vol}(\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f)}$$

Nous allons étudier l'intégrale  $\int_{\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f} \psi^* \eta^f$  en utilisant la construction 5.1. Avec les mêmes notations, nous avons

$$\int_{\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f} \psi^* \eta^f = \int_{p^{-1}(v) \cap \Theta^{-1}(\bar{v})} i_v^*(\eta)$$

où  $v = (x, \varepsilon)$  est le point de  $\pi \times \mathbf{I}$  qui a pour coordonnées les  $(t_i, \mu_{j,k}, \varepsilon)$ , où  $\Theta$  désigne le morphisme  $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{|\tau|}$  défini par les fonctions  $\theta_\ell$  et  $\bar{v}$  désigne l'image de  $v$  dans  $\tau$ . Enfin,  $i_{\bar{v}}^*$  désigne la restriction de la forme  $\eta$  à la fibre de  $Z$  au-dessus de  $\bar{v}$  via la restriction à  $Z$  du morphisme  $\Theta$ . Notons  $I(v)$  cette intégrale.

Pour tout point  $\tilde{v} \in b^{-1}(v)$  nous avons

$$I(v) = I(\tilde{v}) = \int_{p_b^{-1}(\tilde{v}) \cap \Theta^{-1}(\bar{v})} i_{\bar{v}}^* B^*(\eta).$$

De même, nous pouvons calculer notre intégrale  $I(v)$  comme intégrale sur la fibre  $\Theta^{-1}(\bar{v}) \cap \tilde{Z}_b$  de  $\tilde{Z}_b$  au-dessus de  $\bar{v} \in \tau$  de l'image inverse  $c^* B^*(\eta)$ , qui est encore sous-analytique.

D'après la construction 5.1, pour un choix des  $W_\alpha$  rendant analytiques les coefficients de  $\eta$  l'intégrale  $I(\tilde{v})$  est la somme d'intégrales de formes analytiques restreintes aux fibres du morphisme  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \tau$  induit par le morphisme  $\Theta$  et aux domaines qui sont les images réciproques de  $\tilde{Z}_b$  dans les cartes de  $\tau \times \mathbf{R}^{m-|\tau|} \times Y_\alpha$ .

Ces domaines dépendant analytiquement du paramètre  $v$ , on en déduit que la fonction  $I(\tilde{v})$  est analytique sur la carte de l'éclaté  $X$  que nous avons étudiée. Les calculs dans les autres cartes sont analogues et fournissent l'analyticité de  $I(v) \circ b$  sur  $X$ , et donc le fait que la fonction  $I(v)$  est sous analytique sur  $\pi \times \mathbf{I}$ .

Pour chaque  $t \in \tau$ , la forme  $i_t^*(\eta)$  est un multiple sous-analytique de la forme volume  $dV_m$  de  $\mathbf{R}^m$ . Donc, le quotient

$$\frac{\int_{\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f} \psi^* \eta^f}{t_0^{|\phi_0|} \cdots t_s^{|\phi_s|} \text{vol}(\pi(\phi)_{(x,\varepsilon)}^f)}$$

est borné comme fonction de  $x$ . De même, l'intégrale

$$\int_{p_b^{-1}(\tilde{v})} i_{\bar{v}}^* B^*(dV_m)$$

est sous-analytique. Comme le quotient des deux intégrales est borné, c'est une fonction sous-analytique sur  $p_b(Z_b)$ ; elle reste sous-analytique en restriction à  $\varepsilon = 0$ , ce qui montre que la fonction  $\tilde{A}_\phi$  est sous-analytique sur  $\sigma$ .  $\square$

En utilisant les notations de la proposition 3.8, pour toute face  $\phi$  de  $\sigma$ , de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ , telle que  $\phi_0, \dots, \phi_s$  désignent les faces de  $\phi$  situées au dessus des sommets  $y_0, \dots, y_s$  de  $\tau$ , nous noterons

$$A_\phi(x) = (-1)^{\alpha(\phi, \nu)} \frac{(r+s)!}{|\phi_0|! \cdots |\phi_s|! s!} \tilde{A}_\phi(x). \quad (5.7)$$

**Proposition 5.3.** *Soit  $\sigma$  un simplexe orienté de  $\Delta$  ayant pour image  $\tau$  et de dimension relative  $d$ . Soit  $\eta$  une  $r$ -forme différentielle sous-analytique sur  $\sigma$ , avec  $r \leq d$ . Notant  $(\phi^j)_{j \in J}$  les faces de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ , on a sur le prisme  $\pi(\sigma)$  l'égalité*

$$(\psi^* df) \wedge \left( \psi^* \eta - \sum_{j \in J} t_0^{|\phi_0^j|} \cdots t_s^{|\phi_s^j|} (A_{\phi^j} \circ \psi) \omega(\pi(\phi^j)/\tau; \pi(\sigma)) \right) = 0.$$

PREUVE. Soit  $\phi$  une face de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ .

Notons  $\bar{\eta}(x)$  la forme différentielle sous-analytique sur  $\phi_{(x,\varepsilon)}^f$  dont la valeur en tout point  $x'$  de  $\phi_{(x,\varepsilon)}^f$  est égale à  $\tilde{A}_\phi(x) \cdot \omega(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)$ .

Par définition de  $\tilde{A}_\phi$  on a, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit

$$\left| \int_{\phi_{(x,\varepsilon)}^f} \eta^{f(x)}(x) - \int_{\phi_{(x,\varepsilon)}^f} \bar{\eta}(x) \right| \leq C_\phi(\varepsilon) \varepsilon^r.$$

où  $C(\varepsilon)$  tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

En prenant l'image par le morphisme linéaire  $\theta^\sigma$  défini dans l'exemple 2.1, au vu de la Proposition 3.8 et de (5.7), on obtient

$$\left| \int_{\theta^\sigma(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)} \left( \psi^* \eta - t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|} (A_\phi \circ \psi) \omega(\pi(\phi)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \right| \leq C_\phi(\varepsilon) \varepsilon^r.$$

Notons

$$\beta = \psi^* \eta - \sum_{j \in J} t_0^{|\phi_0^j|} \dots t_s^{|\phi_s^j|} (A_{\phi^j} \circ \psi) \omega(\pi(\phi^j)/\tau; \pi(\sigma))$$

où  $(\phi^j)_{j \in J}$  décrit l'ensemble des faces de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ .

Remarquons que si  $\phi^i$  et  $\phi^j$  sont deux faces distinctes de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ , la restriction de  $\omega(\phi^i; \sigma)$  à  $\phi^j$  est nulle, et donc la restriction de  $\omega(\pi(\phi^i)/\tau; \pi(\sigma))$  à  $\pi(\phi^j)$  est nulle. Etant donné un prisme  $\phi^f$  de dimension  $r$  contenu dans une fibre de  $f$  et dans une face de dimension relative  $r$  nous pouvons donc donner l'estimation suivante indépendante de la face qui le contient :

$$\left| \int_{\theta^\sigma(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)} \beta \right| \leq C(\varepsilon) \varepsilon^r, \quad (5.8)$$

où  $C(\varepsilon)$  est la plus grande des constantes  $C_\phi(\varepsilon)$  correspondant aux faces  $\phi$  de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ .

L'inégalité (5.8) implique que la restriction de  $\beta$  à chaque  $\theta^\sigma(\phi_{(x,\varepsilon)}^f)$  est nulle. D'après le lemme 4.2 ceci équivaut à dire que, pour toute coordonnée barycentrique  $\lambda_i$  de  $\sigma$ , on a  $\beta \wedge d\lambda_i = 0$ . D'où le résultat puisque les  $\lambda_i$  forment un système de coordonnées dans  $\pi(\sigma)$ .  $\square$

## 6 Primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques

Notre résultat principal apparaîtra en section 6.4 comme corollaire du résultat suivant :

**Théorème 6.1.** *Soient  $g: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  un morphisme analytique orienté propre et triangulable entre variétés analytiques, et soit  $\omega$  une  $r$ -forme différentielle définie sur  $X$ , sous-analytique et continue, telle que sa restriction à chaque fibre non-singulière  $g^{-1}(y)$  soit*



la différentielle d'une forme sous-analytique  $\xi_y$ . Il existe une forme différentielle sous-analytique  $\Omega$  sur  $X$ , de degré  $r - 1$  et, pour chaque fibre non-singulière  $g^{-1}(y)$ , une forme  $\alpha_y$  de degré  $r - 2$  sous-analytique et continue, telles que l'on ait :

$$\xi_y - \iota_y^* \Omega = d\alpha_y,$$

où  $\iota_y$  désigne le plongement dans  $X$  de la fibre  $g^{-1}(y)$ .

Ce théorème exprime le fait que l'on peut remplacer les formes  $\xi_y$ , primitives de  $\omega$  sur chaque fibre non singulière, par une forme  $\Omega$  qui a l'avantage d'être définie sur tout  $X$ , mais ceci à une forme exacte près sur chaque fibre non singulière. L'existence de  $\Omega$  sera montrée au niveau du faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$ , en la construisant d'abord dans chaque prisme  $\pi(\sigma)$  de dimension maximum, puis "verticalement", au dessus de chaque simplexe  $\tau$  de la base, enfin en montrant que les formes ainsi obtenues se recollent "horizontalement".

PREUVE. Choisissons une triangulation sous-analytique de  $g$  et, reprenant les notations de 1.1, notons  $t: \Delta \rightarrow X$  l'homéomorphisme sous-analytique correspondant, et  $f: \Delta \rightarrow T$  le morphisme simplicial orienté déduit de  $g$ . La forme  $t^*\omega$  est sous-analytique sur  $\Delta$ . D'après la Proposition 5.3, on peut écrire sur le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  l'égalité de formes différentielles

$$(\psi^* de_S^*) \wedge (\psi^*(t^*\omega) - \omega_1) = 0, \quad (6.9)$$

où sur chaque prisme  $\pi(\sigma)$ , notant  $\tau$  son image, la forme  $\omega_1$  est égale à

$$\omega_1 = \sum_{\ell \in L} (A_{\phi^\ell} \circ \psi) t_0^{|\phi_0^\ell|} \dots t_s^{|\phi_s^\ell|} \omega(\pi(\phi^\ell)/\tau; \pi(\sigma)),$$

où les  $(\phi^\ell)_{\ell \in L}$  sont les faces de  $\sigma$  de dimension relative  $r$  et d'image  $\tau$ , et les  $A_{\phi^\ell}$  sont des fonctions sous-analytiques définies sur  $\sigma$ . Notons encore  $A_{\phi^\ell}$  pour  $A_{\phi^\ell} \circ \psi$ ; par construction, lorsque le prisme  $\pi(\sigma)$  varie ainsi que son image  $\tau$ , la donnée  $\pi(\sigma) \mapsto A_{\phi^\ell} \omega(\pi(\phi^\ell)/\tau; \pi)$  définit une forme différentielle relative sur  $\mathcal{P}_f$ .

Cherchons les conditions pour que la forme différentielle  $\omega_1$  soit exacte dans les fibres. Le lemme 3.10, b) suggère de l'écrire comme différentielle d'une combinaison de formes de Whitney.

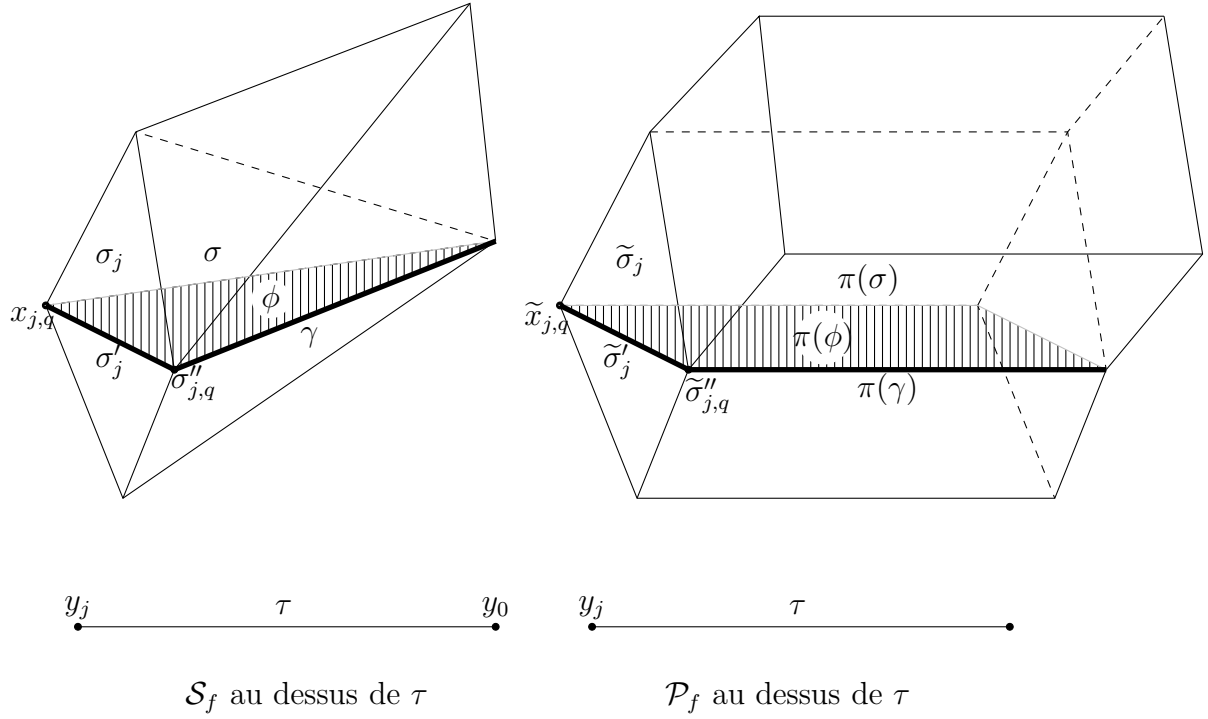
Examinons d'abord ce qui se passe dans le prisme  $\pi(\sigma) = \tau \times \sigma_0 \times \sigma_1 \times \dots \times \sigma_s$ . Les faces de  $\pi(\sigma)$  de dimension relative  $r$  et ayant pour image  $\tau$  sont de la forme

$$\pi(\phi) = \tau \times \sigma'_0 \times \sigma'_1 \times \dots \times \sigma'_s$$

où chaque  $\sigma'_i$  est une face du simplexe  $\sigma_i$  et où la somme des dimensions des simplexes  $\sigma'_i$  vaut  $r$ . Chaque face de  $\pi(\phi)$  de dimension relative  $r - 1$  et ayant pour image  $\tau$  est obtenue par le procédé suivant : On choisit un sommet  $y_j$  du simplexe  $\tau$  et, dans le simplexe  $\sigma'_j$  au dessus de  $y_j$ , un sommet  $x_{j,q}$ . Si l'on note  $\sigma''_{j,q}$  la face de  $\sigma'_j$  opposée au sommet  $x_{j,q}$ , on obtient une telle face de  $\pi(\phi)$  notée

$$\pi(\gamma) = \tau \times \sigma'_0 \times \dots \times \sigma'_{j-1} \times \sigma''_{j,q} \times \sigma'_{j+1} \times \dots \times \sigma'_s.$$

La donnée du couple  $(\phi, \gamma)$  détermine donc l'indice  $j = j(\phi, \gamma)$  du sommet  $y_j$  au dessus duquel  $\phi$  et  $\gamma$  diffèrent ainsi que l'unique sommet  $x_{j,q}$  de  $\phi$  non situé dans  $\gamma$ .



Dans cette figure,  $\sigma$  est le tétraèdre de fibres  $\sigma_j$  au dessus de  $y_j$  et un point au dessus de  $y_0$ , le triangle  $\phi$  (hachuré) en est une face de dimension relative 1 et sa fibre au dessus de  $y_j$  est  $\sigma'_j$ , face de  $\sigma_j$ . Le segment  $\gamma$  est une face de codimension 1 de  $\phi$ , différant de  $\phi$  au dessus du sommet  $y_j$  de  $\tau$ . Le sommet  $x_{j,q}$  de  $\sigma'_j$  est le seul sommet de  $\phi$  n'appartenant pas à  $\gamma$ .

Dans  $\mathcal{P}_f$ , le prisme  $\pi(\sigma)$  est le prisme triangulaire de base  $\tilde{\sigma}_j$ . Le “rectangle”  $\pi(\phi)$  en est une face. Les éléments de la fibre de  $\mathcal{P}_f$  au dessus du sommet  $y_j$  de  $\tau$  sont notés comme suit :  $\tilde{u} = \sigma_0 \times \cdots \times u \times \cdots \times \sigma_s$  où  $u$  figure en  $j$ -ème position.

On a également dessiné d'autres simplexes tels que  $\sigma$  et  $\phi$  dont  $\gamma$  est une face.

FIGURE 8 – Faces  $\gamma$  de  $\phi$  dans  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{P}_f$

Ecrire que la forme différentielle  $\omega_1$  est exacte dans les fibres revient à résoudre dans le prisme  $\pi(\sigma)$ , pour chaque face  $\pi(\phi)$  comme ci-dessus, l'équation

$$t_0^{|\phi_0|} \cdots t_s^{|\phi_s|} A_\phi \omega(\pi(\phi)/\tau; \pi(\sigma)) = d_e \left( \sum_{j=0}^s t_0^{|\phi_0|} \cdots t_{j-1}^{|\phi_{j-1}|} t_j^{|\phi_j|-1} t_{j+1}^{|\phi_{j+1}|} \cdots t_s^{|\phi_s|} \left( \sum_{\gamma} C_\gamma^\phi \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \right), \quad (6.10)$$

où la seconde somme porte sur les faces  $\gamma$  de codimension 1 de  $\phi$  différant de  $\phi$  par un sommet  $x_{j,q}$  situé au dessus du sommet  $y_j$  de  $\tau$ . Les inconnues  $C_\gamma^\phi$  sont des fonctions sous-analytiques des coordonnées barycentriques de  $\tau$  et de  $\phi$ , à support dans le prisme  $\pi(\sigma)$ .

Le calcul de  $d_e(C_\gamma^\phi \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)))$  est une version relative, et dans  $\pi(\sigma)$ , du Lemme 3.13. Notons  $(\phi_h)_{h \in H}$  l'ensemble des faces de dimension relative  $r$  de  $\sigma$  ayant pour image  $\tau$  et admettant  $\gamma$  pour face de codimension 1. En utilisant les notations de Lemme 3.13

et celles des coordonnées barycentriques (2.3), il vient :

$$d_e(C_\gamma^\phi \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma))) = (-1)^r \sum_h \left( (C_\gamma^\phi)_h + \frac{1}{r} \sum_i \lambda_i \frac{\partial (C_\gamma^\phi)_h}{\partial \lambda_i} \right) \omega(\pi(\phi_h)/\tau; \pi(\sigma)), \quad (6.11)$$

où la somme sur  $i$  porte sur les coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  de  $\gamma$ , considérées comme coordonnées barycentriques de  $\phi_h$ , c'est-à-dire que la coordonnée barycentrique de  $\phi_h$  correspondant au sommet de  $\phi_h \setminus \gamma$  n'apparaît pas (voir le lemme 3.13).

D'après les formules (6.10) et (6.11), la détermination des  $C_\gamma^\phi$  se ramène à la résolution pour tout prisme  $\sigma$  d'image  $\tau$ , pour toute face  $\phi$  de  $\sigma$  d'image  $\tau$  et de dimension relative  $r$  et pour tout sommet  $y_j$  de  $\tau$ , de l'équation

$$t_j A_\phi = \sum_{\gamma \subset \phi} \left( C_\gamma^\phi + \frac{1}{r} \sum_{\lambda_i \in I(\gamma)} \lambda_i \frac{\partial C_\gamma^\phi}{\partial \lambda_i} \right)$$

où  $\gamma$  décrit l'ensemble des faces de  $\phi$  de codimension 1 et d'image  $\tau$ , ne différant de  $\phi$  qu'au dessus de  $y_j$ . Celles-ci sont de dimension relative  $r - 1$  et la seconde somme porte sur les coordonnées barycentriques  $\lambda_i$  de  $\gamma$ , dont l'ensemble est noté  $I(\gamma)$ .

Notons  $n(\phi/\tau)$  le nombre de telles faces  $\gamma$  de  $\phi$ . Nous allons chercher des solutions de la forme  $C_\gamma^\phi = t_j \widetilde{C}_\gamma^\phi$  où la fonction  $\widetilde{C}_\gamma^\phi$  est solution de l'équation aux dérivées partielles associée au problème

$$\frac{1}{n(\phi/\tau)} A_\phi = \widetilde{C}_\gamma^\phi + \frac{1}{r} \sum_{\lambda_i \in I(\gamma)} \lambda_i \frac{\partial \widetilde{C}_\gamma^\phi}{\partial \lambda_i} \quad (6.12)$$

coïncidant avec  $A_\phi$  en restriction à  $\gamma$ .

Remarquons que, travaillant, à ce niveau de la démonstration, notre construction nous assure de l'existence d'une solution locale. Le fait que l'on puisse trouver une solution globale (dans les fibres au dessus de l'intérieur de  $\tau$ ) viendra de l'hypothèse d'exactitude de la restriction de la forme  $\omega$  aux fibres lisses.

## 6.1 Résolution de l'équation aux dérivées partielles

La résolution de l'équation (6.12) procède de la proposition suivante :

**Proposition 6.2.** 1) Sur le simplexe  $\sigma = \{\underline{u} \in \mathbf{R}^k, u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1\}$ , l'équation

$$E + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k u_i \frac{\partial E}{\partial u_i} = B$$

avec un second membre  $B$  sous-analytique et continu sur  $\sigma$  et analytique à l'intérieur, a une unique solution sous-analytique et continue donnée par

$$E = \int_0^1 B(s^{\frac{1}{r}} u) ds.$$

Elle est analytique à l'intérieur de  $\sigma$ .

2) Si de plus la fonction  $B$  est arc-analytique, il en est de même de la fonction  $E$ .

PREUVE. Posons

$$E = \int_0^1 B(s^{\frac{1}{r}}u)ds.$$

Nous avons la suite d'égalités

$$u_i \frac{\partial E}{\partial u_i} = \int_0^1 u_i \frac{\partial B}{\partial u_i}(s^{\frac{1}{r}}u) s^{\frac{1}{r}} ds$$

$$B(u) = [sB(s^{\frac{1}{r}}u)]_{s=0}^{s=1} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}(sB(s^{\frac{1}{r}}u))ds = \int_0^1 [B(s^{\frac{1}{r}}u) + \frac{s}{r} \sum_{i=1}^k u_i \frac{\partial B}{\partial u_i}(s^{\frac{1}{r}}u) s^{\frac{1}{r}-1}] ds,$$

ce qui montre que la fonction  $E$  est une solution de l'équation. Elle est continue puisque  $B$  l'est, et sous-analytique sur  $\sigma$  d'après le Lemme 4.11 appliqué à  $\phi(s) = s^{\frac{1}{r}}$ .

Prouvons maintenant l'unicité de la solution. Il s'agit de prouver que la seule solution sous-analytique continue de l'équation

$$E + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k u_i \frac{\partial E}{\partial u_i} = 0$$

est la fonction nulle. Si  $E$  est solution de cette équation, nous avons les égalités

$$\frac{\partial}{\partial s} E(s^{\frac{1}{r}}u) = \frac{s^{\frac{1}{r}-1}}{r} \sum_{i=1}^k u_i \frac{\partial E}{\partial u_i} = -s^{\frac{1}{r}-1} E.$$

Nous allons en déduire que  $E(s^{\frac{1}{r}}u) = C(u)\exp(-rs^{\frac{1}{r}})$  où  $C(u)$  est une fonction sous-analytique et continue. Si  $E \neq 0$  on en déduit en faisant  $s = 0$  que  $C(u)$  est constante et égale à  $E(0)$  et en faisant  $s = 1$  que  $E(u) = E(0)\exp(-r)$  ce qui montre que la fonction  $E$  est constante et doit être nulle.

Enfin, calculant

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^1 B(s^{\frac{1}{r}}u)ds = \int_0^1 s^{\frac{1}{r}} \frac{\partial B}{\partial u_i}(s^{\frac{1}{r}}u)ds,$$

nous voyons que le développement de Taylor de  $E$  converge là où  $B$  est analytique. Ceci prouve la première partie de la proposition.

Le 2) est conséquence du 2) du Lemme 4.11 en prenant  $\phi(s) = s^{\frac{1}{r}}$ .  $\square$

Posons

$$C_\gamma^\phi = \frac{t_j}{n(\phi/\tau)} \int_0^1 A_\phi(s^{\frac{1}{r}}\lambda)ds \quad (6.13)$$

La forme

$$\sum_{\gamma \subset \phi} C_\gamma^\phi \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)) \quad (6.14)$$

est donc, relativement à  $\omega(\pi(\phi)/\tau; \pi(\sigma))$ , une primitive de (6.10) si nous considérons chaque  $C_\gamma^\phi$  comme une fonction des coordonnées barycentriques  $\lambda$  de  $\sigma$ , indépendante de la coordonnée attachée au sommet de  $\phi$  non situé dans  $\gamma$ .

Remarquons que

1. toute autre solution du système d'équations (6.10) est une forme qui diffère de la précédente par une forme fermée.
2. la forme (6.14) est définie localement (en fait, dans l'“étoile de  $\pi(\phi)$ ”).

Afin de montrer que l'on obtient globalement une forme primitive relative de  $\psi^*(t^*\omega)$ , il nous faut montrer :

- a) que l'on peut construire à l'aide de (6.14) une forme définie au dessus de l'intérieur de  $\tau$ , et qui soit primitive relative de  $\psi^*(t^*\omega)$  (prolongement vertical),
- b) que la forme ainsi définie se spécialise “correctement” au dessus des faces de  $\tau$  de façon à déterminer une forme dans  $\mathcal{S}_f$  (prolongement horizontal).

## 6.2 Prolongement vertical

On peut supposer  $T$  triangulé de telle façon que les fibres singulières de  $f : \Delta \rightarrow T$  soient situées au dessus du squelette de codimension 1 de  $T$ . D'après l'hypothèse du théorème 6.1, la restriction de  $t^*\omega$  à toute fibre lisse de  $f$  est exacte. Au dessus de tout point  $y$  de l'intérieur d'un simplexe  $\tau$  de dimension maximum, on peut donc écrire dans la fibre lisse  $F_y = f^{-1}(y)$ , en notant  $i_y$  son inclusion dans  $\Delta$

$$i_y^* t^* \omega = d\zeta_y$$

où la  $(r-1)$ -forme  $\zeta_y$  est représentable par une forme

$$\zeta_y = \sum_{\sigma, \gamma_k} b_k \omega(\gamma_k/\tau; \sigma),$$

la somme portant sur les simplexes  $\sigma$  de dimension maximum au dessus de  $\tau$  et sur les simplexes  $\gamma_k$  de dimension relative  $(r-1)$  et d'image  $\tau$ . Avec les notations précédentes, il vient :

$$\psi^* \zeta_y = \sum_{\sigma, \gamma_k} t_0^{|\gamma_k, 0|} \dots t_s^{|\gamma_k, s|} (b_k \circ \psi) \omega(\pi(\gamma_k)/\tau; \pi(\sigma))$$

qui est une forme définie dans la fibre de  $\mathcal{P}_f$  au dessus de  $y$ .

D'après (6.10) et le calcul précédent, sur chaque prisme  $\pi(\sigma)$ , la forme  $\psi^*(t^*\omega|_{F_y}) = \psi^*(d\zeta_y)$  s'écrit

$$d \left( \sum_{\sigma, \gamma_k} t_0^{|\gamma_k, 0|} \dots t_s^{|\gamma_k, s|} (b_k \circ \psi) \omega(\pi(\gamma_k)/\tau; \pi(\sigma)) \right) = d \left( \sum_{j=0}^s t_0^{|\phi_0|} \dots t_{j-1}^{|\phi_{j-1}|} t_j^{|\phi_j|-1} t_{j+1}^{|\phi_{j+1}|} \dots t_s^{|\phi_s|} \left( \sum_{\gamma} C_{\gamma}^{\phi} \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \right). \quad (6.15)$$

où chaque face  $\gamma_k$  de dimension relative  $(r-1)$  et d'image  $\tau$  apparaît une seule fois de chaque côté de l'équation. Remarquons cependant que si  $\gamma_k$  (dans la somme de gauche) coïncide avec  $\gamma$  (dans la somme de droite), alors  $|\gamma_k, i| = |\phi_i|$  pour  $i \neq j$  et  $|\gamma_k, j| = |\phi_j| - 1$ , autrement dit les deux termes  $t_0^{|\gamma_k, 0|} \dots t_s^{|\gamma_k, s|}$  et  $t_0^{|\phi_0|} \dots t_{j-1}^{|\phi_{j-1}|} t_j^{|\phi_j|-1} t_{j+1}^{|\phi_{j+1}|} \dots t_s^{|\phi_s|}$  sont égaux.

D'après le lemme de Poincaré appliqué au domaine étoilé  $\pi(\sigma) \cap f^{-1}(y)$  (fibre non singulière), et avec des notations évidentes, il existe une  $(r-2)$ -forme  $\alpha_y$  sur  $\pi(\sigma) \cap f^{-1}(y)$  telle que :

$$\sum_{\gamma_k} \left( t_0^{|\gamma_k, 0|} \dots t_s^{|\gamma_k, s|} \left[ b_k \circ \psi - C_{\gamma_k}^{\phi} \right] \omega(\pi(\gamma_k)/\tau; \pi(\sigma)) \right) = d\alpha_y.$$

Comme précédemment (cf. 6.10), nous allons chercher des solutions  $\alpha_y$  sous la forme

$$\alpha_y = \sum_{h=0}^s \left( t_0^{|\gamma_{k,0}|} \dots t_{h-1}^{|\gamma_{k,h-1}|} t_h^{|\gamma_{k,h}|-1} t_{h+1}^{|\gamma_{k,h+1}|} \dots t_s^{|\gamma_{k,s}|} \sum_{\beta} D_{\beta}^{\gamma_k} \omega(\pi(\beta)/\tau; \pi(\sigma)) \right),$$

où  $\beta$  décrit l'ensemble des faces de codimension 1 de  $\gamma_k$  ne différant de  $\gamma_k$  qu'au dessus du sommet  $y_h$  de  $\tau$ .

Nous sommes donc ramenés à résoudre, pour chaque  $\pi(\gamma_k)$  l'équation

$$\begin{aligned} & t_0^{|\gamma_{k,0}|} \dots t_s^{|\gamma_{k,s}|} \left[ b_k \circ \psi - C_{\gamma_k}^{\phi} \right] \omega(\pi(\gamma_k)/\tau; \pi(\sigma)) = \\ & d \left( \sum_{h=0}^s t_0^{|\gamma_{k,0}|} \dots t_{h-1}^{|\gamma_{k,h-1}|} t_h^{|\gamma_{k,h}|-1} t_{h+1}^{|\gamma_{k,h+1}|} \dots t_s^{|\gamma_{k,s}|} \left( \sum_{\beta} D_{\beta}^{\gamma_k} \omega(\pi(\beta)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

laquelle est du même type que l'équation (6.10). Les solutions en  $D_{\beta}^{\gamma_k}$  sont donc données par la proposition 6.2. Elles sont sous-analytiques, la forme correspondante

$$\sum_{\beta \subset \gamma_k} D_{\beta}^{\gamma_k} \omega(\pi(\beta)/\tau; \pi(\sigma))$$

est sous-analytique et déterminée à une forme fermée près.

Posons, comme précédemment,

$$C_{\gamma}^{\phi} = t_j \widetilde{C}_{\gamma}^{\phi} \quad D_{\beta}^{\gamma} = t_h \widetilde{D}_{\beta}^{\gamma}.$$

Dans le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$ , et dans chaque fibre lisse au dessus de l'intérieur d'un simplexe  $\tau$  de dimension maximale, on définit la forme

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\gamma \subset \phi \subset \sigma} t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|} \widetilde{C}_{\gamma}^{\phi} \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)) + d \left( \sum_{\beta \subset \gamma \subset \phi \subset \sigma} t_0^{|\gamma_0|} \dots t_s^{|\gamma_s|} \widetilde{D}_{\beta}^{\gamma} \omega(\pi(\beta)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \\ = & \sum_{\gamma \subset \phi \subset \sigma} t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|} \left( \widetilde{C}_{\gamma}^{\phi} \omega(\pi(\gamma)/\tau; \pi(\sigma)) + d \left( \sum_{\beta \subset \gamma} \widetilde{D}_{\beta}^{\gamma} \omega(\pi(\beta)/\tau; \pi(\sigma)) \right) \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

où les faces  $\phi, \gamma, \beta$  de  $\sigma$  ont toutes pour image  $\tau$  et sont de dimension relatives respectives  $r, r-1, r-2$ .

La forme  $H$  est définie sur le faisceau prismal  $\mathcal{P}_f$  au dessus de tout simplexe (fermé)  $\tau$ . D'après la proposition 3.8,  $H$  est image réciproque d'une forme différentielle  $H_{\mathcal{S}}$  définie sur le faisceau prismal  $\mathcal{S}_f$  au dessus de  $\tau$  :

$$H_{\mathcal{S}} = \sum_{\gamma \subset \phi \subset \sigma} \left( \widetilde{C}_{\gamma}^{\phi} \omega(\gamma/\tau; \sigma) + d \left( \sum_{\beta \subset \gamma} \widetilde{D}_{\beta}^{\gamma} \omega(\beta/\tau; \sigma) \right) \right).$$

Il en est de même de  $\alpha_y$  au dessus des points  $y$  de l'intérieur de  $\tau$ , laquelle s'écrit  $\alpha_y = \psi^*(\alpha_{\mathcal{S},y})$ . Au dessus d'un tel point, autrement dit pour toute fibre non singulière  $F_y = g^{-1}(y)$ , il vient donc :

$$\psi^* \zeta_y - \psi^*(\iota_y^*(H_{\mathcal{S}})) = d\psi^*(\alpha_{\mathcal{S},y}),$$

où  $\iota_y$  désigne le plongement dans  $X$  de la fibre  $g^{-1}(y)$ .

### 6.3 Prolongement horizontal

Soit alors  $\tau'$  une face de  $\tau$  et  $\phi'$  la face de  $\phi$  située au dessus de  $\tau'$ . Notons  $y_0, \dots, y_u$  les sommets de  $\tau'$  et donc  $\phi_0, \dots, \phi_u$  les faces de  $\phi'$  situées au dessus de ces sommets. Supposons dans un premier temps  $\dim_{\text{rel}} \phi' < r$ . Cela implique

$$|\phi_0| + \dots + |\phi_u| - u < r.$$

Mais comme  $|\phi_0| + \dots + |\phi_s| - s = r$ , il vient

$$|\phi_{u+1}| + \dots + |\phi_s| - (s - u) > 0$$

ce qui signifie que l'on a  $|\phi_j| \geq 0$  pour l'un au moins des  $j = (u+1), \dots, s$ . On en conclut que le coefficient  $t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|}$  tend vers 0 lorsqu'on s'approche de  $\phi'$  et donc la forme (6.17) s'y annule.

Supposons maintenant que  $\dim_{\text{rel}} \phi' \geq r$ , cela signifie que

$$|\phi_0| + \dots + |\phi_u| - u \geq r$$

et donc certains des  $|\phi_j|$  pour  $j > u$  peuvent s'annuler. En particulier, pour  $|\phi_{u+1}| = \dots = |\phi_s| = 0$ , le prisme au dessus d'une fibre de  $\tau'$  coïncide avec le prisme au dessus d'une fibre de  $\tau$ . La définition (formule 6.13) de  $C_\gamma^\phi$  en fonction de  $A_\phi$  intègre les signes et coefficients de la formule 5.7. Ce sont, d'après la proposition 3.8, les signes et coefficients nécessaires pour que la forme différentielle (6.17) se spécialise correctement et définisse une forme sur le faisceau prismal  $\mathcal{S}_f$ .

Dans tous les cas, la forme que l'on peut définir sur  $\tau'$  par le même procédé coïncide donc avec la spécialisation de la forme définie sur  $\tau$ .

Comme de plus les exposants de  $t_0^{|\phi_0|} \dots t_s^{|\phi_s|}$  correspondent aux dimensions convenables, nous obtenons donc une forme différentielle  $H_{\mathcal{S}}$  définie sur  $\mathcal{S}_f$  et satisfaisant :

$$\zeta_y - \iota_y^*(H_{\mathcal{S}}) = d(\alpha_{\mathcal{S},y})$$

pour toute fibre non singulière  $g^{-1}(y)$ . Par l'homéomorphisme sous analytique  $t$ , on en déduit le théorème 6.1.  $\square$

### 6.4 Le résultat

**Corollaire 6.3.** *Soient  $g: X \rightarrow \mathbf{R}^n$  un morphisme analytique orienté propre et triangulable entre variétés analytiques, et soit  $\omega$  une  $r$ -forme différentielle sur  $X$  sous-analytique continue telle que la restriction de  $\omega$  à chaque fibre non-singulière de  $g$  soit la différentielle d'une forme sous-analytique. Il existe une  $(r-1)$ -forme sous-analytique continue  $\Omega$  sur  $X$  telle que l'on ait*

$$dg \wedge (\omega - d\Omega) = 0$$

où  $dg$  est l'image inverse de la forme volume sur  $\mathbf{R}^n$ .

PREUVE. Par hypothèse, la restriction de  $\omega$  à toute fibre non-singulière de  $g$  s'écrit :

$$\omega_y = d\xi_y.$$

D'après le théorème 6.1, il existe une forme différentielle  $(r - 1)$ -forme différentielle sous-analytique continue  $\Omega$  telle que l'on ait

$$\xi_y - \iota_y^* \Omega = d\alpha_y$$

pour toute fibre non singulière de  $g$ , où  $\iota_y$  désigne le plongement dans  $X$  de la fibre  $g^{-1}(y)$ . La différentielle de  $\Omega$  au sens des distributions admet un représentant sous-analytique continu et qui vérifie (voir le lemme 4.2)

$$dg \wedge (\omega - d\Omega) = 0.$$

Ceci démontre le corollaire. □

## Références

- [B] E. Bierstone, *Control of radii of convergence and extension of subanalytic functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 4, 997–1003.
- [B-M1] E. Bierstone and P. Milman, *Arc-analytic functions*. Invent. Math. 101 (1990), no. 2, 411–424.
- [B-M2] E. Bierstone and P. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets* Pub. Math. IHES, N0. 67, pp 5-42.
- [Car] H. Cartan *Séminaire 1948-49*, 1ère édition, Exposé Numéro XII.
- [C-T] S. Chanillo and F. Trèves *Local exactness in a class of differential complexes*. Journal A.M.S. Vol. 10 Numéro 2, 1997, 393–426.
- [D] Z. Denkowska, *Ensembles sous-analytiques à la polonaise*. Avec une introduction aux fonctions et ensembles analytiques. Travaux en Cours 69. Paris : Hermann, viii, 121 p. (2007).
- [D-W] Z. Denkowska et K. Wachta, *La sous-analyticité de l'application tangente*. Bull. Acad. Pol. Sci., Sr. Sci. Math. 30, 329-331 (1982).
- [Du-L] J. Dupont et R. Ljungmann, *Integration of simplicial forms and Deligne cohomology*, Math. Scand. 97 (2005), no. 1, 11–39.
- [Du-K] J. Dupont et F.W. Kamber, *Gerbres, simplicial forms and invariants for families of foliated bundles*, Comm. Math. Phys. 253 (2005), no. 2, 253–282.
- [God] R. Godement *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann Paris 1964.
- [Hi] H. Hironaka *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Pisa, Instituto Leonida Tonelli, 1973.
- [Ha] R.M Hardt *Continuité locale Hölder de la tranche d'une chaîne sous-analytique par une application sous-analytique* C.R.A.S. Paris, t. 287 (27 Novembre 1978), p.993-995
- [K-P] K. Kurdyka et L. Paunescu, *Arc-analyticity is an open property*, Séminaires et Congrès, 10, 2005, 155-162.



- [L-R1] J.-M. Lion et J.-P. Rolin, *Intégration des fonctions sous-analytiques et volumes des sous-ensembles sous-analytiques*, Annales Inst. Fourier, tome 48, no. 3 (1998), 755-767.
- [Pa] A. Parusiński, *On the preparation theorem for subanalytic functions*, New developments in singularity theory (Cambridge, 2000), 193–215, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001
- [Pw] W. Pawłucki, *Points de Nash des ensembles sous-analytiques*. Mem. Amer. Math. Soc. 84 (1990), no. 425, vi+76 pp.
- [Sh1] M. Shiota *Piecewise linearization of subanalytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 312 (2), 1989, 663–679.
- [Sh2] M. Shiota *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. No. 150, 1997, Birkhäuser, Boston.
- [Spa] E. Spanier *Algebraic topology*, Princeton University Press. 1982.
- [Su] D. Sullivan *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. I.H.E.S., 47, (1977), 269-331.
- [Te1] B. Teissier *Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques*, Publications Mathématiques de l’I.H.E.S., No. 70, 1989, 169-198.
- [Te2] B. Teissier *Valuations, deformations, and toric Geometry*, Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999), 361–459, Fields Inst. Commun., 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [Whi] H. Whitney *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.